

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ

1. Έστω A, B, C αντιστρέψιμοι 2×2 πίνακες με

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίστε τον

$$(B^2CA)^{-1}.$$

2. Έστω $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} g+3a & -2a & 4d & 0 \\ h+3b & -2b & 4e & 0 \\ 2 & 1 & 19 & 2 \\ i+3c & -2c & 4f & 0 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

3. Υπολογίστε το εμβαδόν A του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα διανύσματα του 3-διάστατου χώρου $\mathbf{u} = (2, -2, 1)$ και $\mathbf{v} = (1, -2, 3)$.

4. Υπολογίστε τη γωνία ϕ που σχηματίζουν το επίπεδο E_1 με εξίσωση

$$3x - 3\sqrt{2}y + 3z = 7$$

και το επίπεδο E_2 με εξίσωση

$$-x = z - 12.$$

5. Έστω

$$\mathbf{v}_1 = (-2, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 2), \mathbf{v}_3 = (-3, 5).$$

Εξετάστε αν το $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι μία βάση του \mathbb{R}^2 .

6. (α) Βρείτε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 - 8x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -8x_1 - 16x_2 + 16x_3 - 8x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

(β) Βρείτε μία βάση του χώρου των λύσεων W του ομογενούς συστήματος (1).

(γ) Βρείτε τη διάσταση του W .

7. Έστω

$$z = \sqrt{3} - i.$$

(α) Υπολογίστε το μέτρο $|z|$ του z .

(β) Υπολογίστε το πρωτεύον όρισμα $\text{Arg}(z)$ του z .

(γ) Βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του z^3 .

(δ) Βρείτε τις κυβικές ρίζες του z .

8. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και λ μία ιδιοτιμή του A . Αποδείξτε ότι αν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην λ με $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$, τότε το $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην λ .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ