Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Οικονομίας και Διοίκησης

# Στατιστική

**Εξεταστική Περίοδος:** Σεπτέμβριος 2019
**Διδάσκων** : Β. ΚΟΥΤΡΑΣ **Χίος 20/09/2019**

**ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$** (Μονάδες 2)
Δώστε την κατάλληλη απάντηση (ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ) στις ακόλουθες προτάσεις. Όπου η επιλογή σας είναι ΛΑΘΟΣ αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας. (χωρίς αιτιολόγηση δεν παίρνετε μονάδες).

**(i).** Αν η τ.μ. $X\sim N(0,1)$ και η τ.μ. $Y\sim\chi_5^2$, τότε η τ.μ. $X/\sqrt{Y}$ ακολουθεί την κατανομή $t_5$.

**(ii).** Έστω $X_1, X_2, \dots, X_9$ ένα τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό με μέση τιμή $E(X)$ και διακύμανση $Var(X)$. Τότε η τυχαία μεταβλητή $\frac{\bar{X}-E(X)}{\sqrt{Var(X)}/3}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0,1)$.

**(iii).** Θέλουμε να ελέγξουμε την επίδραση ενός καταλύτη στην ταχύτητα μιας χημικής αντίδρασης. Για το λόγο αυτό παίρνουμε ένα δείγμα 10 αντιδράσεων που δεν έγινε χρήση καταλύτη και μετράμε την ταχύτητα $X_i, i = 1, \dots, 10$ της αντίδρασης, και ένα δείγμα 10 αντιδράσεων στις οποίες έγινε η χρήση καταλύτη και μετράμε πάλι την ταχύτητα της αντίδρασης $Y_i, i = 1, \dots, 10$. Για να ελέγξουμε αν ο καταλύτης επιδρά ή όχι στην ταχύτητα της αντίδρασης θα διενεργήσουμε έλεγχο υποθέσεων για τη μέση διαφορά με δείγματα κατά ζεύγη.

**(iv).** Στην ανάλυση απλής γραμμικής παλινδρόμησης το πρόσημο του δειγματικού συντελεστή συσχέτισης $r$ των μεταβλητών $X$ και $Y$ συμπίπτει με το πρόσημο της εκτίμησης για την παράμετρο $\alpha$ της ευθείας .

**ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$** (Μονάδες 3)
Μια βιομηχανία αυτοκινήτων χρησιμοποιεί ελαστικά μιας συγκεκριμένης μάρκας Α. Από παλαιότερη έρευνα έχει προκύψει ότι η αντοχή (έως την καταστροφή) $X$ (σε $Km$) των ελαστικών ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu_A, \sigma_A^2)$.

**(i).** Να βρεθεί ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για τη μέση τιμή της αντοχής $\mu_A$ (σε $Km$ ) της μάρκας ελαστικών Α.

**(ii).** Να εξεταστεί αν ο εκτιμητής του ερωτήματος **(i)** είναι συνεπής εκτιμητής της μέσης αντοχής $\mu_A$ της μάρκας ελαστικών Α.

Η βιομηχανία δέχεται μια πρόταση για να χρησιμοποιήσει μια νέα μάρκα ελαστικών Β, για την οποία η αντοχή (έως την καταστροφή) $Y$ (σε $Km$) των ελαστικών ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu_B, \sigma_B^2)$. Οι μηχανικοί της βιομηχανίας προσπαθούν να αποφασίσουν αν τελικά θα χρησιμοποιήσουν ελαστικά μάρκας Α ή μάρκας Β για ένα νέο μοντέλο αυτοκινήτου. Για να πάρουν αυτήν την απόφαση, χρησιμοποίησαν ελαστικά της κάθε μάρκας σε 16 αυτοκίνητα και μέτρησαν για κάθε ένα σε πόσα χιλιόμετρα καταστράφηκαν τα ελαστικά. Για τη μάρκα Α, η μέση αντοχή σε $Km$ προέκυψε 42500 $Km$ με τυπική απόκλιση 5400 $Km$, ενώ για τη μάρκα Β, η μέση αντοχή σε χιλιόμετρα προέκυψε 47800 $Km$ με τυπική απόκλιση 6200 $Km$.

**(iii).** Να βρεθεί και να ερμηνευτεί το 90% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά της μέσης αντοχής (σε $Km$) των δύο τύπων ελαστικών. Ποια μάρκα ελαστικών προτείνετε στη βιομηχανία και γιατί;

**ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$** (Μονάδες 2)
Σε μια βιομηχανία ενδυμάτων, ένα μηχάνημα παράγει κουμπιά μέσης διαμέτρου 2.5 $cm$. Το μηχάνημα ορισμένες φορές απορυθμίζεται και παράγει κουμπιά με διαφορετική διάμετρο.

**(i).** Ο υπεύθυνος ποιοτικού ελέγχου συλλέγει ένα δείγμα από 81 κουμπιά και βρίσκει ότι η μέση διάμετρος του δείγματος είναι 2.53 $cm$, με τυπική απόκλιση 1.1 $mm$. Με βάση το δείγμα αυτό, να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$ αν το μηχάνημα παράγει κουμπιά μεγαλύτερης διαμέτρου και επομένως χρειάζεται να ρυθμιστεί. Ο έλεγχος να γίνει με τη χρήση της περιοχής απόρριψης (κρίσιμης περιοχής) της $H_0$.

**(ii).** Ο υπεύθυνος ποιοτικού ελέγχου δεν έχει πειστεί για το αν το μηχάνημα χρειάζεται να ρυθμιστεί ή όχι. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο δείγμα και το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας, θέλει να ελέγξει αν το μηχάνημα παράγει κουμπιά με διαφορετική διάμετρο από αυτή που πρέπει (2.5 $cm$). Ο έλεγχος να γίνει με τη χρήση της $p$-τιμής.

**ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$** (Μονάδες 2)
Ένας αναλυτής θέλει να διαπιστώσει κατά πόσο η απόδοση της μετοχής της IBM επηρεάζεται από την απόδοση του δείκτη S&P500. Πιο συγκεκριμένα θέλει να διερευνήσει τη γραμμική σχέση που μπορεί να έχει η απόδοση της μετοχής της IBM με το δείκτη S&P500. Για το λόγο αυτό έχει συλλέξει τις αποδόσεις (%) των τελευταίων 12 μηνών:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Απόδοση IBM (%)** | -0.42 | 2.45 | 2.32 | -1.55 | 3.77 | -1.51 | 1.91 | 2.1 | 0.62 | 0.69 | 4.31 | -3.56 |
| **Απόδοση S&P500 (%)** | -1.07 | -0.68 | -13.4 | -1.28 | 0.92 | 5.74 | -1.68 | -5.62 | 2.07 | 3.95 | 5.38 | -5.81 |

Με βάση τα στοιχεία αυτά:

**(i).** Να εκτιμηθεί η ευθεία της απλής γραμμικής παλινδρόμησης που συνδέει την απόδοση της μετοχής της IBM με τον δείκτη S&P500.

**(ii).** Είναι σημαντική η παλινδρόμηση σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$;

**(iii).** Πόσο θα αναμένατε να αυξηθεί η απόδοση της μετοχής της IBM αν η απόδοση του δείκτη S&P500 αυξηθεί κατά 2% σύμφωνα με το μοντέλο της απλής γραμμικής παλινδρόμησης που βρήκατε στο **(i)**;

**(iv).** Σε τι ποσοστό η απόδοση της μετοχής της IBM επηρεάζεται από άλλος παράγοντες πέραν της απόδοσης του δείκτη S&P500 σύμφωνα με το μοντέλο της απλής γραμμικής παλινδρόμησης που βρήκατε στο **(i)**;

**Καλή Επιτυχία**

| Διαστήματα Εμπιστοσύνης | | | |
|---|---|---|---|
| **Δύο πληθυσμοί-Διαφορά μέσων τιμών $\mu_1 - \mu_2$** | | | |
| **Κατανομή πληθυσμών** | **Διασπορές** | **Δείγματα** | **100(1-α)% δ.ε.** |
| κανονική | γνωστές | μικρά/μεγάλα | $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ |
| μη-κανονική | γνωστές | μεγάλα | $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ |
| κανονική | άγνωστες & ίσες/άνισες | μεγάλα | $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$ |
| κανονική | άγνωστες & ίσες | μικρά | $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2} \cdot S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$ |
| κανονική | άγνωστες & άνισες | μικρά | $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\nu,1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$ |
| $\nu = \frac{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2+\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}$ | | | $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ |
| **Λόγος των διασπορών δύο πληθυσμών $\sigma_2^2 / \sigma_1^2$** | | | |
| **Κατανομή πληθυσμών** | | | **100(1-α)% δ.ε.** |
| κανονική | | | $\left(\frac{S_2^2}{S_1^2}F_{1-\frac{a}{2},n_1-1,n_2-1}, \frac{S_2^2}{S_1^2}F_{\frac{a}{2},n_1-1,n_2-1}\right)$ |

| Έλεγχος υποθέσεων | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Μέση τιμή $\mu$ του πληθυσμού** | | | | | |
| **Διασπορά** | **Πληθυσμός** | **Δείγμα** | **Σ.Σ. Ελέγχου** | **Έλεγχος** | **Περιοχή απόρριψης $H_1$: $R$** |
| γνωστή | κανονικός | μικρό ή μεγάλο | $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ | $H_1: \mu > \mu_0$ | $[z_{1-a}, +\infty)$ |
| | | | | $H_1: \mu < \mu_0$ | $(-\infty, -z_{1-a}]$ |
| | | | | $H_1: \mu \neq \mu_0$ | $(-\infty, -z_{1-a/2}] \cup [z_{1-a/2}, +\infty)$ |
| άγνωστη | κανονικός | μικρό ή μεγάλο | $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ | $H_1: \mu > \mu_0$ | $[t_{n-1,1-a}, +\infty)$ |
| | | | | $H_1: \mu < \mu_0$ | $(-\infty, -t_{n-1,1-a}]$ |
| | | | | $H_1: \mu \neq \mu_0$ | $(-\infty, -t_{n-1,1-a/2}] \cup [t_{n-1,1-a/2}, +\infty)$ |
| γνωστή ή άγνωστη | μη- κανονικός | μεγάλο | $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ή $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ | $H_1: \mu > \mu_0$ | $[z_{1-a}, +\infty)$ |
| | | | | $H_1: \mu < \mu_0$ | $(-\infty, -z_{1-a}]$ |
| | | | | $H_1: \mu \neq \mu_0$ | $(-\infty, -z_{1-a/2}] \cup [z_{1-a/2}, +\infty)$ |

| Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{\beta} = \frac{S_{XY}}{S_X^2}$ | $r^2 = \frac{S_{XY}^2}{S_X^2 \cdot S_Y^2}$ | $S_{XY} = 0.727$ | $S_X^2 = 29.328$ | $S_Y^2 = 5.482$ | $S = 2.452$ |
| **Έλεγχος Υποθέσεων** | | | | | |
| **Στατιστική συνάρτηση ελέγχου (σ.σ.ε.)** | **Έλεγχος** | **Περιοχή απόρριψής $H_0$** | | | |
| $T = \frac{\hat{\beta}-\beta_0}{S/S_X}$ | $H_1: \hat{\beta} > \beta_0$ | $(t_{n-2,1-a}, +\infty)$ | | | |
| | $H_1: \hat{\beta} < \beta_0$ | $(-\infty, -t_{n-2,1-a})$ | | | |
| | $H_1: \hat{\beta} \neq \beta_0$ | $(-\infty, -t_{n-2,1-a/2}) \cup (t_{n-2,1-a/2}, +\infty)$ | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_{0.95,15,15} = 0.4167$ | $F_{0.05,15,15} = 2.4$ | $t_{30,0.95} = 1.697$ | $z_{0.95} = 1.645$ | $\Phi(2.5) = 0.9938$ | $t_{10,0.975} = 2.228$ |

σ.π.π. της $N(\mu, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

**Καλή Επιτυχία**