



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Προσομοίωση
26 Σεπτεμβρίου 2019

Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρως αιτιολογημένες!

Θέμα 1 (2 μονάδες)

Χωρίς να υπολογίσετε αναλυτικά τα Z_i , **προσδιορίστε** ποιες από τις παρακάτω Γραμμικές Αναλογικές Γεννήτριες ($Z_i = (aZ_{i-1} + c) \pmod{m}$) έχουν πλήρη περίοδο. **Εξηγήστε** αναλυτικά με αναφορές στη θεωρία.

(α) $Z_i = (13Z_{i-1} + 13) \pmod{16}$

(β) $Z_i = (Z_{i-1} + 12) \pmod{13}$

Θέμα 2 (3 μονάδες)

Ακολουθώντας τη μέθοδο της αποδοχής-απόρριψης, να **παράγετε** ένα (1) τυχαίο αριθμό από την πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \frac{3}{4}x(2-x), \quad 0 \leq x \leq 2$$

χρησιμοποιώντας ομοιόμορφους στο (0,1) τυχαίους αριθμούς από τον παρακάτω πίνακα.

0.71	0.47	0.11	0.02	0.68	0.53	0.58	0.29	0.30	0.30	0.28	0.05	0.30
0.77	0.01	0.76	0.81	0.26	0.28	0.83	0.82	0.71	0.05	0.41	0.86	0.59

Διατυπώστε αναλυτικά τα βήματα του αλγόριθμου της μεθόδου της απόρριψης για την παραγωγή ενός τυχαίου αριθμού από την κατανομή με την παραπάνω πυκνότητα πιθανότητας. **Πόσες** επαναλήψεις κατά μέσο όρο χρειάζεται ο αλγόριθμος που προτείνετε για την παραγωγή ενός τυχαίου αριθμού;

Θέμα 3 (3 μονάδες)

Έστω ένα σύστημα αναμονής με έναν εξυπηρετητή, όπου A_1, A_2, \dots οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων και S_1, S_2, \dots οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών. Έστω ότι οι 4 πρώτες αφίξεις στο σύστημα παρατηρήθηκαν στους χρόνους 0.4, 1.6, 2.6 και 3.8, ενώ οι 4 πρώτες αναχωρήσεις παρατηρήθηκαν στους χρόνους 1.8, 3.0, 3.6 και 4.5. Αν θεωρήσουμε ότι ο χρόνος της προσομοίωσης του συστήματος είναι ίσος με $T=4$, να **ορίσετε** και να **υπολογίσετε**

- I. την αναμενόμενη μέση καθυστέρηση στην ουρά (d_n),
- II. τον αναμενόμενο μέσο αριθμό πελατών στην ουρά (q_n) και
- III. την μέση χρησιμοποίηση του συστήματος (u_n).
- IV. Δώστε μια γραφική αναπαράσταση του προσομοιωτή μέχρι και τη χρονική στιγμή $t=1.6$

Θέμα 4 (2 μονάδες)

Το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη είναι ένα γνωστό πρόβλημα στο χώρο των επιχειρήσεων. Ο εφημεριδοπώλης αγοράζει καθημερινά σε τιμή χονδρικής ποσότητα Q (από εφημερίδες) χωρίς να γνωρίζει τη ζήτηση εκ των προτέρων. Έστω ότι η τιμή χονδρικής της εφημερίδας είναι 0.55 ευρώ και η τιμή λιανικής είναι 1 ευρώ. Αν ο εφημεριδοπώλης δεν πουλήσει όλες τις εφημερίδες τότε τις επιστρέφει λαμβάνοντας για κάθε εφημερίδα 0.03 ευρώ. Αν υποθέσουμε ότι η ζήτηση ακολουθεί μια κανονική κατανομή με μέση τιμή 135.7 τεμάχια και τυπική απόκλιση 27.1 τεμάχια, **δώστε** ένα διάγραμμα ροής για την περιγραφή της διαδικασίας που θα ακολουθούσατε προκειμένου να προσδιορίσετε την βέλτιστη τιμή της ποσότητας Q μέσω προσομοίωσης. **Εξηγήστε** αναλυτικά το κάθε βήμα του διαγράμματος!

Καλή επιτυχία!

Τυπολόγιο

Σχέση συνάρτησης πυκνότητας και
συνάρτησης κατανομής

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

$$f(x) = F'(x)$$

I. ΒΑΣΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

1. Διωνυμική $f(x) = \binom{v}{x} p^x (1-p)^{v-x} \quad x = 0, 1, \dots, v.$

$$b(v, p) \quad E(X) = vp, \quad V(X) = vp(1-p)$$

(Bernoulli $b(p) \equiv b(1, p)$)

2. Αρνητική διωνυμική $f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \quad x = r, r+1, \dots$

$$(ή Pascal) NB(r, p) \quad E(X) = \frac{r}{p}, \quad V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

(Γεωμετρική: $G(p) \equiv NB(1, p)$)

3. Poisson $f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, \dots$

$$P(\lambda) \quad E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda$$

II. ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

1. Ομοιόμορφη $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

$$U(\alpha, \beta) \quad E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad V(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

2. Εκθετική $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$

$$E(\theta) \equiv E(1, \theta) \equiv \Gamma(1, \theta) \quad E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

3. Κανονική $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad -\infty < x < \infty$

$$N(\mu, \sigma^2) \quad E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2$$