ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Στοχαστικά Μοντέλα

Εξεταστική Περίοδος: Ιούνιος 2020
Διδάσκων : Β. ΚΟΥΤΡΑΣ **19/06/2020**

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

(Μονάδες: 2– Διάρκεια Θέματος: 20 λεπτά)

Δώστε την κατάλληλη απάντηση (ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ) στις ακόλουθες προτάσεις. Δεν απαιτείται αιτιολόγηση της απάντησης σας.

(i). Η στρατηγική Bull spread ακολουθείται από κάποιον επενδυτή που περιμένει πτώση της τιμής μιας μετοχής.

(ii). Η στρατηγική Butterfly spread αφορά την αγορά δύο δικαιωμάτων πώλησης με τιμή εξάσκησης K_1 και K_3 ($K_1 < K_3$) και την παράλληλη πώληση δύο δικαιωμάτων αγοράς με τιμή εξάσκησης K_2 (επί της ίδιας μετοχής και με ίδια ημερομηνία εξάσκησης), με το K_2 να παίρνει τιμές μεταξύ των K_1 και K_3 (συνήθως $(K_1 + K_3)/2$) και βρίσκεται κοντά στην τρέχουσα τιμή της υποκείμενης μετοχής.

(iii). Αν μια τράπεζα προσφέρει ονομαστικό επιτόκιο r, τότε στο συνεχές σύνθετο επιτόκιο το πραγματικό επιτόκιο σε ένα χρόνο είναι $e^r - 1$.

(iv). Η τιμή συναλλαγής K (delivery price) ενός ΣΜΕ με λήξη μετά από T έτη, η οποία δεν οδηγεί σε arbitrage, είναι $K = E(S_T)$.

(v). Κάτω από το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου η no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς στο χρόνο 0 (C), μπορεί να γραφεί ως εξής: $C = e^{-rT} \cdot E_p[(S_T - K)_+]$, όπου p η πιθανότητα η τιμή της υποκείμενης μετοχής να σημειώσει άνοδο στο χρόνο T, S_T η τιμή της υποκείμενης μετοχής στο χρόνο T, και K η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς.

(vi). Δεν είναι ποτέ συμφέρον να εξασκήσει κάποιος ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου πριν τη λήξη του.

(vii). Η no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου είναι μικρότερη από την no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου $t \in [0, T]$.

(viii). Σε μια διαδικασία submartingale, η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε τη χρονική s $(s \leq t)$ για τη στοχαστική διαδικασία X_t σε μια μελλοντική χρονική στιγμή t, δεδομένης της πληροφορίας $\mathcal{F}_s$, είναι μικρότερη από την τιμή της στοχαστικής διαδικασίας τη χρονική στιγμή s, X_s.

(ix). Ένα δυναμικό χαρτοφυλάκιο με σύνθεση $\boldsymbol{x}_i = (x_1(t_i), x_2(t_i), \ldots, x_k(t_i))$, στο χρόνο t_i καλείται αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο αν ισχύει ότι:

$$x_i \cdot S_{i-1}' = x_i \cdot S_i', \quad i = 1, \ldots, n-1$$

όπου $\boldsymbol{S}_i = (S_1(t_i), S_2(t_i), \ldots, S_k(t_i))$ είναι το τυχαίο διάνυσμα των χρηματικών αξιών των k τίτλων της αγοράς στο χρόνο t_i.

(x). Στο μοντέλο Black-Scholes, η no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, με ημερομηνία λήξης T και τιμή εξάσκησης K, στο χρόνο t, αυξάνεται όσο αυξάνεται το επιτόκιο r.

ΘΕΜΑ 2ο

(Μονάδες: 3– Διάρκεια Θέματος: 40 λεπτά)

Έστω μια μετοχή Α με σημερινή τιμή $S_0 = 8.64€$. Στα επόμενα δύο εξάμηνα ($h = 0.5$) η τιμή της μετοχής Α εξελίσσεται σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο με $b = 5/3$ και $\alpha = 2/3$. Με βάση το μοντέλο αυτό και θεωρώντας συνεχή ανατοκισμό, να τιμολογήσετε ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου επί της μετοχής Α με τιμή εξάσκησης $K = 8.64€$ και χρόνο λήξη $T = 1$ έτος, σε κάθε χρονική στιγμή και για κάθε περίπτωση της τιμής της μετοχής Α. Δίνεται $e^{rh} = 4/3$.

ΘΕΜΑ 3ο

(Μονάδες: 3– Διάρκεια Θέματος: 30 λεπτά)

Έστω μια ακολουθία $(X_n)_{n\geq 0}$ ανεξάρτητων και θετικών τυχαίων μεταβλητών, για τις οποίες ισχύει $\mathrm{E}[X_n] = 1$ για κάθε $n \geq 0$. Έστω ακόμα μια τυχαία μεταβλητή $M_0 > 0$, που είναι ανεξάρτητη από την ακολουθία

$(X_n)_{n\geq 0}$ για κάθε $n \geq 0$ και για την οποία ισχύει $E[M_0] < \infty$. Να δείξετε ότι η ακολουθία $(M_n)_{n\geq 0}$ που ορίζεται ως $M_n = M_0 \cdot \prod_{j=1}^{n} X_n$ για κάθε $n \geq 0$, είναι martingale ως προς την ακολουθία $(X_n)_{n\geq 0}$.

<u>ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$</u>

(Μονάδες: 2– Διάρκεια Θέματος: 40 λεπτά)

Αν η ανέλιξη της αξίας S_t $t \in [0, T]$ μιας μετοχής Α στο χρονικό διάστημα $[0, T]$, περιγράφεται από μια γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους μ (drift) και σ (volatility), να δείξετε ότι η πιθανότητα η αξία ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης επί της μετοχής Α (τιμή εξάσκησης K, χρόνος εξάσκησης T) τη χρονική στιγμή $t < T$ να είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης K, είναι ίση με: