ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης γραμμένα σε παραπάνω από μία μετοχές

Νταραγιάννης Χαράλαμπος

Επιβλέπων: Μπαλτάς Ιωάννης

Διπλωματική εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Μηχανικών Οικονομίας και Διοίκησης
του Πανεπιστημίου Αιγαίου

Χίος
Μάρτιος, 2020

Ευχαριστίες

Με την ευκαιρία της ολοκλήρωσης της διπλωματικής μου εργασίας στο Τμήμα Μηχανικών Οικονομίας και Διοίκησης, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μπαλτά Ιωάννη για την συνεχή καθοδήγησή του σε ό,τι χρειάστηκα κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης οφείλω να ευχαριστήσω θερμά και τους καθηγητές του τμήματος, κ. Βασιλείου Ευάγγελο και κ. Κούτρα Βασίλειο οι οποίοι δέχθηκαν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή αξιολόγησης της εργασίας μου, αλλά και για τις γνώσεις που μου μετέδωσαν κατά τα έτη φοίτησής μου στην σχολή. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την πολύπλευρη στήριξη και τις συμβουλές που μου παρείχαν κατά την διάρκεια ολοκλήρωσης της εργασίας.

Περιεχόμενα

Μέρος I Δικαιώματα σε μία μετοχή

Μέρος II Δικαιώματα σε δύο μετοχές

Κατάλογος Σχημάτων

Περίληψη

Ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι ένας τίτλος (ένα χρηματοοικονομικό παράγωγο προϊόν) μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, του πωλητή και του αγοραστή του δικαιώματος, που προβλέπει την αγοραπωλησία ενός υποκείμενου τίτλου/αγαθού σε μια προκαθορισμένη μελλοντική τιμή και στιγμή στο μέλλον. Το βασικό χαρακτηριστικό του δικαιώματος είναι πως ο αγοραστής αποκτώντας τον τίτλο αυτό στην κατοχή του, αποκτά το δικαίωμα εξάσκησης (δηλαδή αγοραπωλησίας του υποκείμενου τίτλου/αγαθού), σε αντίθεση με τον πωλητή που σε περίπτωση εξάσκησης είναι υποχρεωμένος να τηρήσει τα συμφωνηθέντα. Μιας και ο αγοραστής βρίσκεται την στιγμή σύναψης της σύμβασης αυτής σε πλεονεκτική θέση, για να λάβει τον τίτλο αυτό στην κατοχή του θα πρέπει να καταβάλει ένα αντίτιμο, γνωστό και ως ασφάλιστρο ή τιμή του δικαιώματος.

Ένας από τους πιο γνωστούς και ευρέως εφαρμοσμένους τρόπους εκτίμησης της τιμής αυτής, είναι με τα λεγόμενα δένδρα τιμολόγησης: (α) το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης, όπως προτάθηκε αρχικώς από τον Sharpe το 1978 [27] και αργότερα από τους Cox, Ross και Rubinstein [19] το 1979, και (β) το τριωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης, όπως προτάθηκε από τον Boyle [16] το 1986 και αργότερα από τους Kamrad & Ritchken [24] το 1991. Το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης βασίζεται σε μία πολύ απλή υπόθεση αναφορικά με τον τρόπο με τον οποίο εξελλίσεται στον χρόνο η τιμή ενός υποκείμενου αγαθού (έστω μετοχή) πάνω στο οποίο είναι γραμμένο το δικαίωμα. Ουσιαστικά αυτή η υπόθεση μας λέει πως την επόμενη χρονική στιγμή η τιμή της μετοχής μπορεί να πάρει δύο μόνο τιμές, μια ανοδική και μια καθοδική. Το τριωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης είναι μια άμεση επέκταση του διωνυμικού μοντέλου, όπου προστέθηκε μία ακόμη κατάσταση (ότι την επόμενη χρονική στιγμή η μετοχή θα μείνει αμετάβλητη). Παρά το απλό του χαρακτήρα τους, τα υποδείγματα αυτά μπορούν να επεκταθούν σε πολλές χρονικές περιόδους, σχηματίζοντας έτσι έναν ορίζοντα με περισσότερα πιθανά σενάρια για την τελική τιμή του υποκείμενου τίτλου (καταστάσεις της οικονομίας), δίνοντας με τον τρόπο αυτό περισσότερο ρεαλιστικά αποτελέσματα. Αξίζει να σημειωθεί πως μέχρι και σήμερα η τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης τόσο Ευρωπαϊκού (εξάσκηση μόνο στην λήξη) και Αμερικάνικου (εξάσκηση οποτεδήποτε μέχρι και την λήξη) τύπου, γίνεται αποτελεσματικά με τα υποδείγματα αυτά. Χαρακτηριστικό είναι πως στο Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών, τα δικαιώματα Αμερικανικού τύπου τιμολογούνται με την βοήθεια του διωνυμικού υποδειγματος τιμολόγησης.

Τα μοντέλα τιμολόγησης που περιγράψαμε παραπάνω λειτουργούν πολύ απλά και αποτελεσματικά, όταν το δικαίωμα είναι γραμμμένο σε έναν μόνο τίτλο. Στο σημείο αυτό όμως γεννάται το ερώτημα: Τι συμβαίνει αν το δικαίωμα το οποίο θέλουμε να τιμολογήσουμε είναι γραμμένο σε παραπάνω από μια μετοχές. Το ερώτημα αυτό δεν είναι τόσο άμεσο αν απαντηθεί καθώς απαιτείται μια όχι τόσο προφανής επέκταση των παραπάνω υποδειγμάτων. Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο την μελέτη του προβλήματος αυτού, για την περίπτωση Ευρωπαϊκών κυρίως δικαιωμάτων προαίρεσης, τα οποία είναι γραμμένα πάνω σε δύο μετοχές οι αποδόσεις των οποίων εμφανίζουν μεταξύ τους συσχέτιση. Πιο συγκεκριμένα στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τις εξής αριθμητικές μεθόδους αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης:

- Διωνυμικά δένδρα γραμμένα σε μία μετοχή.
- Τριωνυμικά δένδρα γραμμένα σε μία μετοχή.

- Διωνυμικά δένδρα γραμμένα σε δύο μετοχές.

- Τριωνυμικά δένδρα γραμμένα σε δύο μετοχές.

Τα υποδείγματα αυτά θα τα εξετάσουμε τόσο θεωρητικά όσο και αριθμητικά (μελετώντας την ευαισθησία τους ως προς τις διάφορες υποκείμενες παραμέτρους), με στόχο να δώσουμε μια ολοκληρωμένη εικόνα στο πρόβλημα που μελετάμε.

Η δομή της εργασίας αυτής έχει ως εξής. Καταρχάς, στην πρώτη ενότητα, που είναι εισαγωγική, θα κάνουμε μια μικρή εισαγωγή στο τι είναι τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, θα δούμε τις κύριες κατηγορίες αυτών, θα μιλήσουμε για τα δικαιώματα προαίρεσης (με των οποίων την τιμολόγηση έχει να κάνει η εργασία) και τα βασικά τους χαρακτηριστικά. Θα δούμε τους τύπους των δικαιωμάτων αυτών και κάποιες επιπλέον κατηγορίες εκτός των Ευρωπαικών και Αμερικάνικων. Επίσης θα μιλήσουμε για τις θέσεις όπου κάποιος μπορεί να λάβει στα δικαιώματα προαίρεσης και την πιθανή απόδοση που θα έχει. Από κει και πέρα, η εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος εξετάζουμε το πρόβλημα τιμολόγησης δικαιωμάτων που είναι γραμμένα πάνω σε μία μετοχή με βάση το διωνυμικό και το τριωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης. Πιο συγκεκριμένα, στο δεύτερο κεφάλαιο κάνουμε μία εισαγωγή στο διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης (σύμφωνα με τους Cox, Ross & Rubinstein [19]) και στο τρίτο εξετάζουμε το τριωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης (το γνωστό υπόδειγμα των Kamrad & Ritchken [24]) ως μία άμεση επέκταση του διωνυμικού μοντέλου. Το πρώτο μέρος κλείνει με μία στοιχειώδη αριθμητική μελέτη της συμπεριφοράς των υποδειγμάτων αυτών ως προς την μεταβολή των παραμέτρων τους. Το δεύτερο μέρος επικεντρώνεται αποκλειστικά στην περίπτωση τιμολόγησης Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων που είναι γραμμένα σε παραπάνω από μία μετοχές (συγκεκριμένα εξετάζουμε την περίπτωση δύο μετοχών). Το δεύτερο μέρος δεν είναι τίποτα άλλο παρά μία άμεση επέκταση των υποδειγμάτων που παρουσιάστηκαν στο πρώτο μέρος της εργασίας. Συγκεκριμένα, στο πέμπτο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την επέκταση του διωνυμικού υποδείγματος γραμμένο σε δύο μετοχές (το υπόδειγμα των Boyle, Evnine, Gibbs [13]). Κατόπιν, στο έκτο κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε την επέκταση του τριωνυμικού υποδείγματος γραμμένο σε δύο μετοχές (το υπόδειγμα των Kamrad & Ritchken [24]). Όπως και στο πρώτο μέρος, έτσι και εδώ κλείνουμε με την αριθμητική μελέτη της συμπεριφοράς των δύο αυτών υποδειγμάτων. Η παρούσα εργασία ολοκληρώνεται με την συγκεντρωτική παρουσίαση των συμπερασμάτων και την παρουσίαση των προγραμμάτων (σε περιβάλλον Matlab) για τα κεφάλαια τέσσερα και επτά.

Η παρούσα εργασία είναι γραμμένη στο LaTeX.

Summary

An option, is a financial title (financial product) between two parties, the buyer of the option and the seller of the option, in order to buy or sell an underlying asset in a specific time and price in the future. The basic characteristic of an option is that the holder of the option has the right to exercise (that is, the right to buy or sell the underlying asset), in contrast to the seller (writer of the option), who, in case of exercise, she is obliged to follow the agreement. Since the holder of the option, at the beginning of this agreement, is in an advantageous position, in order to possess this title, must pay to the seller of the option a compensation fee, known as the premium (or option price).

One of the most known and widely applied ways of estimating the option price, is by following the so-called lattice methods: (a) The binomial pricing model, as introduced by Sharpe [27] in 1978 and further developed by Cox, Ross & Rubinstein [19], in 1979, and (b) the trinomial pricing model, as introduced by Boyle [16] in 1986, and further developed by Kamrad & Ritchken [24] in 1991. The binomial option pricing model is based on a very simple assumption, regarding the way in which the price of the underlying asset (on which the option is written), evolves in time. Substantially, this dictates that the underlying stock, can move in two distinct ways in the future, namely, to move upwards or downwards. The trinomial option pricing model is a direct extension of the binomial option pricing model by considering one more potential future movement of the underlying stock (the stock price does not change). Despite their simple structure, these models can be extended to include more than one time possible scenarios for the final price of the underlying asset (i.e., different states of the economy), provinding this way more realistic results. At this point, it is worth to mention that until today the pricing of the European options (exercise at expiry time) and American type options (exercise whenever until the expiry time) is efficiently carried out with these models. Furthermore, it has to be stated that American option pricing in the Athens Derivatives Exchange, is carried out by resorting to the binomial option pricing model.

When the option is written only on one underlying asset, the above mentioned pricing models, work in a simple and effective way. However, at this point an interesting question arises, concerning the pricing of options written on more than one underlying assets. This in not a simple question, as it demands the extension (not in an obvious way) of the above models. This thesis aims to answer this question in the case of European options written on two correlated stocks. More specifically, we will work with the following numerical methods of options pricing:

- Binomial trees written in one stock.
- Trinomial trees written in one stock.
- Binomial trees written in two stocks.
- Trinomial trees written in two stocks.

These option pricing model will be examined from both theoretical and numerical (by examining the sensitivity of the option price to the change of the underlying parameters) point of view, in

order to provide a complete answer to the above problem.

An outline of the present thesis, is as follows: First of all, in the first section, we will make a brief introduction to financial derivative products, their main categories, and focus on options (as the pricing of this kind of derivatives is the main subject of the present work) and their basic characteristics. We will present the main option types and some additional categories other than European and American options. Finally, we will briefly discuss about the positions that someone can take in the options market and the possible payoff from this position. This thesis consists of two parts. The first part is concerned with the problem of option pricing for options written on one underlying stock, based on the binomial and trinomial models. To be more precise, in Chapter two, we make a brief introduction to the binomial option pricing model (according to Cox, Ross & Rubinstein [19]), and in the third chapter, we present the trinomial option pricing model (according to Kamrad & Ritchken [24]), as a direct extension of the binomial option pricing model. The first part is concluded with an simple numerical study of the behavior of these models with respect to the underlying parameters. The second part exclusively focus on the pricing of European options written on more than one underlying stocks (here we consider the case of two stocks). The second part is a direct extension of the option pricing models presented in the first part of this thesis. To be more precise, in the fifth chapter, we will present the extension of the binomial option pricing model for options written on two stocks (the model of Boyle, Evnine & Gibbs [13]). Then, in the sixth chapter, we will present the extension of the trinomial option pricing model for options written on two stocks (the model of Kamrad & Ritchken [24]). As in the first part, this part is also concluded with the numerical study of the behavior of these two models. The thesis is conmpleted with the presentation of the main conclusions and the codes (in Matlab) for chapters four and seven.

1

Βασικές έννοιες των παραγώγων

Ένα χρηματοοικονομικό παράγωγο προϊόν (ή παράγωγος τίτλος) αποτελεί ένα συμβόλαιο του οποίου η αξία παράγεται από την αξία άλλων χρηματοοικονομικών μεταβλητών, πάνω στα οποία είναι δομημένο (γραμμένο). Οι μεταβλητές αυτές μπορεί να είναι μετοχές, συνάλλαγμα, δείκτες, επιτόκια, εμπορεύματα (όπως καφές, καλαμπόκι ή βαμβάκι) κ.α. Ένα παράγωγο συμβόλαιο αποτελείται από δύο αντισυμβαλλόμενους, τον αγοραστή και τον πωλητή του συμβολαίου. Ο αγοραστής του παραγώγου συμβολαίου έχει την υποχρέωση (ή το δικαίωμα) να εξασκήσει το συμβόλαιο που αγόρασε, ενώ ο πωλητής του συμβολαίου έχει την υποχρέωση να εκτελέσει τους όρους του συμβολαίου, εάν αυτό εξασκηθεί από τον αγοραστή. Το πρώτο παράγωγο προϊόν εμφανίζεται στην αρχαία Ελλάδα και συγκεκριμένα από το Θαλή τον Μιλήσιο, περίπου το 600 π.Χ. Όπως αναφέρει ο Αριστοτέλης στο έργο «Πολιτικά» (βιβλίο Ι κεφ.11), ο Θαλής ο Μιλήσιος ήταν αυτός ο οποίος συνέταξε το πρώτο παράγωγο συμβόλαιο πριν από περίπου 2.500 χρόνια. Αυτό συγκεκριμένα αφορούσε την συγκομιδή ελιάς. Σε αντίθεση με την κοινή γνώμη και με τους ιδιοκτήτες ελαιοτριβείων ο Θαλής πίστευε ότι η σοδειά της επόμενης χρονιάς θα ήταν πολύ καλή. Αυτή βέβαια η πρόβλεψη πηγάζε από τις θέσεις και τις κινήσεις των άστρων, μία ακόμα επιστήμη στην οποία ο Θαλής είχε προχωρήσει πολύ βαθειά. Έτσι, έχοντας κάνει μία καλή πρόβλεψη, σύναψε συμφωνία με τους ιδιοκτήτες όλων των ελαιοτριβείων της περιοχής για την αποκλειστική διαχείρισή τους. Μάλιστα, αυτό φυσικά έγινε με το ανάλογο κόστος. Οι ιδιοκτήτες των ελαιοτριβείων προβλέποντας μία κακή χρονιά για την σοδειά της ελιάς, παραχώρησαν τα ελαιοτριβεία στον Θαλή (ο οποίος είχε προβλέψει καλή σοδειά), έναντι κάποιου αντιτίμου, προτιμώντας έτσι κάποια σίγουρα χρήματα τώρα παρά μία πιθανή ζημιά. Ο Θαλής βέβαια βάσει συμφωνίας, εάν δεν επιθυμούσε, δεν θα έκανε χρήση των ελαιοτριβείων. Παρόλα αυτά η πρόβλεψη του Θαλή αποδείχθηκε σωστή μιας και η σοδειά ήταν καλή τελικά, με αποτέλεσμα να ασκήσει το δικαίωμα που του έδινε το παράγωγο συμβόλαιο και να χρησιμοποιήσει τα ελαιοτριβεία. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να κερδίσει πολύ περισσότερα χρήματα από αυτά που κατέβαλε στους ιδιοκτήτες των ελαιοτριβείων ώστε να του τα παραχωρήσουν. Αυτοί βέβαια εισέπραξαν το αντίτιμο το οποίο όμως ήταν πολύ μικρότερο συγκριτικά με το κέρδος που θα είχαν εάν δεν παραχωρούσαν τα ελαιοτριβεία στον Θαλή. Βέβαια, σε αντίθετη περίπτωση εάν η πρόβλεψη του Θαλή ήταν λανθασμένη και η σοδειά δεν ήταν καλή, τότε θα μπορούσε να μην ασκήσει τη συμφωνία και με τον τρόπο αυτό να ζημιωνόταν μόνο το αρχικό ποσό που έδωσε στους ιδιοκτήτες των ελαιοτριβείων. Χρόνια μετά, η πρώτη διαπραγμάτευση παραγώγων συμβολαίων σε υποτυπώδες χρηματιστήριο έγινε τη δεκαετία του 1630 στο Amsterdam, με την χαρακτηριστική περίπτωση της αγοραπωλησίας βολβών τουλίπας (μανία της τουλίπας), ενώ από το 1973 και έπειτα λειτούργησε και το πρώτο χρηματιστήριο παραγώγων στο Chicago. Στην Ελλάδα η πρώτη αγορά παραγώγων πραγματοποιήθηκε το 1999, μετά και τη δημιουργία του Χρηματιστηρίου Παραγώγων Αθηνών. Για περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με τα παράγωγα, τη δομή, τους τρόπους και τους τόπους συναλλαγής τους, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να διαβάσει τα βιβλία των Αγγελόπουλου [1], Λιβάνη & Ν. Γεωργιάδη [3], Πουφινά & Φλώρου [9], Hull [22, 8] και James [23].

1.1 Παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα

Ένα από τα πιο σημαντικά και ενδιαφέροντα προβλήματα της χρηματοοικονομικής μηχανικής αποτελεί η τιμολόγηση παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων κυρίως λόγω της πολύπλοκης δομής τους, αλλά και του τρόπου με τον οποίο εξελίσσεται στο χρόνο η τιμή του υποκείμενου τίτλου πάνω στον οποίο είναι γραμμένα. Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό, είναι απαραίτητος ένας συνδυασμός τεχνικών τόσο της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων όσο και τεχνικών του προγραμματισμού.

Τι εννοούμε όμως λέγοντας παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν;

Όπως είπαμε και παραπάνω, ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν είναι ένας χρηματοοικονομικός τίτλος μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, του αγοραστή και του πωλητή του συμβολαίου. Ένα τέτοιο συμβόλαιο προβλέπει την αγοραπωλησία μιας προκαθορισμένης ποσότητας ενός αγαθού ή τίτλου σε μια προκαθορισμένη χρονική τιμή και στιγμή στο μέλλον. Υπάρχουν τέσσερα βασικά είδη παραγώγων συμβολαίων (τα οποία παρουσιάζουμε παρακάτω), τα προθεσμιακά συμβόλαια, τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, τα συμβόλαια ανταλλαγής και τα δικαιώματα προαίρεσης. Τα συμβόλαια αυτά διαπραγματεύονται είτε σε οργανωμένα χρηματιστήρια παραγώγων, είτε σε εξωχρηματιστηριακές αγορές (Over The Counter - OTC). Στις αγορές OTC, σε αντίθεση με τις χρηματιστηριακές αγορές, τα συμβόλαια δεν είναι τυποποιημένα (δηλαδή συμβόλαια με προκαθορισμένους όρους και χαρακτηριστικά), αλλά οι όροι τους γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης μεταξύ του αγοραστή και του πωλητή οι οποίοι να μπορούν να τους προσαρμόσουν με βάση τις ανάγκες τους. Στα οργανωμένα χρηματιστήρια υπάρχουν αυστηροί κανόνες οι οποίοι διασφαλίζουν τη σωστή τήρηση των συναλλαγών, επικρατεί διαφάνεια και παράλληλα μείωση του κινδύνου αντισυμβαλλομένου. Τα παράγωγα συμβόλαια αποτελούν ένα πολύ σημαντικό χρηματοοικονομικό εργαλείο, μιας και βρίσκουν εφαρμογή είτε για λόγους κερδοσκοπίας, είτε για την εξασφάλιση των επενδυτών έναντι των διαφόρων χρηματοοικονομικών κινδύνων στους οποίους υπόκεινται, αφού συμμετέχοντας στις χρηματοοικονομικές αγορές, είναι εκτεθειμένοι στη μεταβλητότητα που τις χαρακτηρίζει.

1.1.1 Κύριες κατηγορίες παραγώγων προϊόντων

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα διακρίνονται σε διάφορες κατηγορίες, ανάλογα με τα βασικά χαρακτηριστικά τους, τις υποχρεώσεις των αντισυμβαλλομένων, του χρόνου εξάσκησης, το χρηματοοικονομικό προϊόν πάνω στο οποίο παράγονται, κλπ. Η πιο βασική διάκριση είναι αυτή που τα χωρίζει στα προθεσμιακά συμβόλαια, στα δικαιώματα προαίρεσης και στο συνδυασμό των δύο (Για περισσότερες πληροφορίες βλ. Πουφινά & Φλώρο [9]). Υπάρχουν λοιπόν τα ακόλουθα βασικά είδη παραγώγων:

1. Τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts) . Αποτελούν μία συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλομένων, για την παράδοση μιας συγκεκριμένης ποσότητας αγαθού/τίτλου σε μία προκαθορισμένη χρονική στιγμή και τιμή στο μέλλον. Πρόκειται για συμφωνίες οι οποίες διαπραγματεύονται σε οργανωμένες χρηματιστηριακές αγορές και υπόκεινται σε ημερήσιο διακανονισμό (αποτίμηση) με βάση την πρόσφατη τιμή στην αγορά. Οι όροι των συμβολαίων αυτών, δεν καθορίζονται από τους αντισυμβαλλόμενους, (καθώς έχουν τυποποιημένα χαρακτηριστικά) αλλά από το χρηματιστήριο.

2. Τα Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forward Contracts) . Αποτελούν μία συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, για την αγοραπωλησία μιας συγκεκριμένης ποσότητας αγαθού/τίτλου σε μία προκαθορισμένη χρονική στιγμή και τιμή στο μέλλον. Είναι συμφωνίες οι οποίες διαπραγματεύονται τόσο εντός όσο και εκτός χρηματιστηριακών αγορών (OTC). Ένα βασικό χαρακτηριστικό των προθεσμιακών συμβολαίων είναι πως οι όροι τους δεν είναι τυποποιημένοι, όπως των Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης, αλλά μπορούν να γίνουν αντικείμενο

διαπραγμάτευσης μεταξύ του αγοραστή και του πωλητή του συμβολαίου βάσει των αναγκών τους.

3. Τα Συμβόλαια Ανταλλαγής (Swaps). Πρόκειται για μια σύμβαση ανταλλαγής χρηματοροών (τακτικών πληρωμών) συγκεκριμένης ονομαστικής αξίας, μεταξύ δύο μερών. Τα συμβόλαια αυτά, γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε εξωχρηματιστηριακές (OTC) . Δεν είναι τυποποιημένα συμβόλαια και μπορούν να τροποποιηθούν κατάλληλα έτσι ώστε να καλύψουν τις ανάγκες των αντισυμβαλλομένων. Κύρια παραδείγματα αποτελούν τα Interest Rate Swaps - IRS που προβλέπουν ανταλλαγή τόκων (για παράδειγμα κυμαινόμενου επιτοκίου με πληρωμές σταθερού επιτοκίου) και τα Credit Default Swaps - CDS τα οποία είναι ένα είδος ασφάλειας. Στα CDS ο πωλητής, αναλαμβάνει την υποχρέωση να πληρώσει στον αγοραστή τις απώλειες που θα υποστεί από ένα πιστωτικό γεγονός (εάν συμβεί), έναντι μιας περιοδικής πληρωμής ασφαλίστρων.

4. Τα Δικαιώματα Προαίρεσης (Options) . Αποτελούν μια συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, για την αγοραπωλησία μιας συγκεκριμένης ποσότητας ενός αγαθού/τίτλου σε μία προκαθορισμένη χρονική στιγμή και τιμή στο μέλλον. Είναι μία συμφωνία, η οποία δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο, ενώ αντίθετα ο πωλητής του δικαιώματος αναλαμβάνει την υποχρέωση να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο, εφόσον ο αγοραστής αποφασίσει να εξασκήσει το δικαίωμά του. Πρόκειται για συμφωνίες οι οποίες διαπραγματεύονται εντός χρηματιστηριακών αγορών. Όπως και τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης, οι όροι τους είναι τυποποιημένοι και καθορίζονται από το χρηματιστήριο.

Υπάρχουν κάποιες βασικές διαφορές μεταξύ των Προθεσμιακών Συμβολαίων και των Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης, οι οποίες είναι οι εξής:

- Τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης είναι τυποποιημένα συμβόλαια μιας και είναι συμβόλαια εντός χρηματιστηριακών αγορών, εν αντιθέσει με τα Προθεσμιακά Συμβόλαια των οποίων τα χαρακτηριστικά προσαρμόζονται στις ανάγκες των αντισυμβαλλομένων, αφού αποτελούν ιδιωτικές συμφωνίες.

- Η αγορά των Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης εμφανίζει μεγαλύτερη ρευστότητα από την αγορά των προθεσμιακών συμβολαίων.

- Στις χρηματιστηριακές αγορές υπάρχει αυστηρότερη εποπτεία (οίκος εκκαθάρισης) από ό-τι υπάρχει στις εξωχρηματιστηριακές αγορές, με αποτέλεσμα ο κίνδυνος αθέτησης να είναι (θεωρητικά) μεγαλύτερος στα Προθεσμιακά Συμβόλαια. Βέβαια, από την παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση και έπειτα, η εποπτεία έχει αυξηθεί και στις OTC αγορές.

- Στα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης ο διακανονισμός των θέσεων γίνεται ημερησίως με την διαδικασία της καθημερινής αποτίμησης, ενώ στα Προθεσμιακά Συμβόλαια ο χρηματικός διακανονισμός (ή η παράδοση) γίνεται στη λήξη.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα διάκριση έχει να κάνει με το υποχρεωτικό του χαρακτήρα των παράγωγων χρηματοοικονομικών συμβολαίων. Έτσι λοιπόν διακρίνονται στα:

- Παράγωγα προθεσμιακής βάσης.

- Παράγωγα προαιρετική βάσης.

Τα παράγωγα προθεσμιακής βάσης είναι τα Προθεσμιακά Συμβόλαια, τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης και τα Συμβόλαια Ανταλλαγής. Ουσιαστικά, υποχρεώνουν τον έναν αντισυμβαλλόμενο να αγοράσει και τον άλλο να πουλήσει (με μηδενικό αρχικό κόστος σύναψης της συμφωνίας) μια συγκεκριμένη ποσότητα του υποκείμενου αγαθού/τίτλου, σε καθορισμένη τιμή και ημερομηνία παράδοσης. Αντίθετα, τα παράγωγα προαιρετικής βάσης (δηλαδή τα Δικαιώματα Προαίρεσης), δίνουν το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση στον κάτοχό τους να αγοράσει ή να πουλήσει μια καθορισμένη ποσότητα του υποκειμένου προϊόντος σε καθορισμένη τιμή και ημερομηνία παράδοσης με το αντίστοιχο όμως κόστος σύναψης της συμφωνίας. Στα παράγωγα προθεσμιακής βάσης δεν είναι δυνατή η αποχώρηση από τη συμφωνία (με εξαίρεση τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης), σε αντίθεση με τα παράγωγα προαιρετικής βάσης, όπου υπάρχει δυνατότητα αποχώρησης.

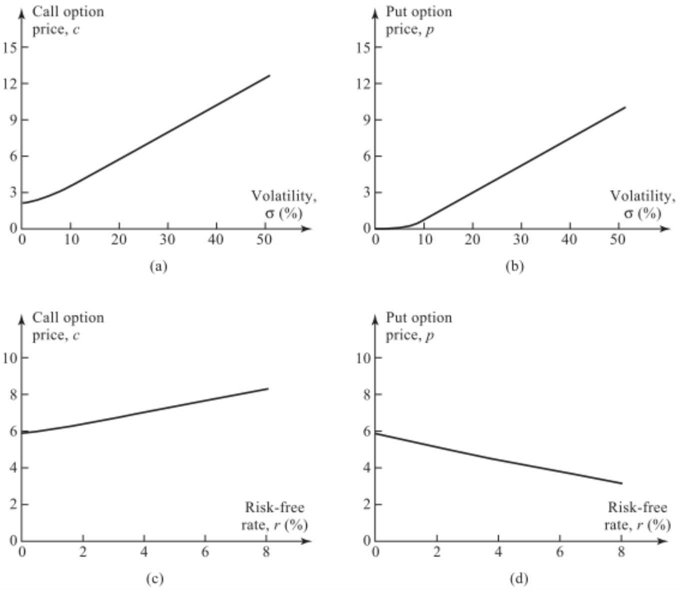
1.2 Δικαιώματα προαίρεσης

Προηγουμένως αναφέραμε τις σημαντικότερες κατηγορίες παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, που γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης τόσο ενδοχρηματιστηριακά, όσο και εξωχρηματιστηριακά. Από αυτά, αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελούν τα δικαιώματα προαίρεσης, όπου σύμφωνα με αυτά που είπαμε, αποτελούν μία διμερή σύμβαση μεταξύ του αγοραστή και του πωλητή για την αγοραπωλησία μιας συγκεκριμένης ποσότητας ενός αγαθού/τίτλου σε μία προκαθορισμένη χρονική στιγμή και τιμή και με συγκεκριμένο τρόπο στο μέλλον. Ένα δικαίωμα προαίρεσης αποτελεί μία πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση παραγώγου συμβολαίου, καθώς η κατοχή του απαιτεί την καταβολή ενός αντιτίμου, γνωστό και ως ασφάλιστρο. Πιο συγκεκριμένα, ο αγοραστής του δικαιώματος πληρώνει το ασφάλιστρο και αποκτά το δικαίωμα εξάσκησης, ενώ ο πωλητής του δικαιώματος εισπράττει το αντίτιμο και αναλαμβάνει την υποχρέωση να τηρήσει τα συμφωνηθέντα, αν και μόνο αν η αντίθετη θέση (ο αγοραστής του δικαιώματος) αποφασίσει να το εξασκήσει. Το αντίτιμο αυτό, λέγεται και ασφάλιστρο και αποτελεί ένα είδος αποζημίωσης για τον πωλητή του δικαιώματος επειδή μπαίνοντας σε αυτή την σύμβαση αναλαμβάνει χρηματοοικονομικό κίνδυνο. Επομένως, από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε στην τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης, εννοούμε την εκτίμηση αυτού του αντιτίμου.

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης, γραμμένα πάνω σε μετοχές, τα οποία αποτελούν ένα από τα δημοφιλέστερα είδη παραγώγων συμβολαίων. Τα βασικά δομικά χαρακτηριστικά των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι τα εξής:

- Η τρέχουσα τιμή της μετοχής πάνω στην οποία είναι γραμμένο το δικαίωμα (τη συμβολίζουμε με S_0).
- Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος (Strike Price -τη συμβολίζουμε με K).
- Ο χρόνος έως τη λήξη του δικαιώματος (τον συμβολίζουμε με T).
- Η μεταβλητότητα των τιμών της υποκείμενης μετοχής (τη συμβολίζουμε με $\sigma > 0$).
- Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (το συμβολίζουμε με $r > 0$).

Παρόλο που όλες οι παραπάνω μεταβλητές είναι σημαντικές και επηρεάζουν με άμεσο τρόπο την εξέλιξη της τιμής ενός δικαιώματος, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν η μεταβλητότητα των τιμών της υποκείμενης μετοχής και το επιτόκιο δίχως κίνδυνο. Η μεταβλητότητα, αποτελεί ένα μέτρο αβεβαιότητας για τη μελλοντική κίνηση της υποκείμενης μετοχής. Καθώς η μεταβλητότητα αυξάνεται, η πιθανότητα να ανέβει ή να πέσει η τιμή της μετοχής αυξάνεται. Ας υποθέσουμε πως έχουμε λάβει θέση αγοραστή σε δικαίωμα αγοράς (δηλαδή έχουμε αποκτήσει το δικαίωμα να αγοράσουμε στο μέλλον μία ποσότητα ενός συγκεκριμένου αγαθού ή τίτλου). Έτσι, για τον κάτοχο της θέσης αγοράς, υπάρχει όφελος από την άνοδο της τιμής, η οποία λόγω της αυξημένης μεταβλητότητας, έχει περισσότερες πιθανότητες να ξεπεράσει την τιμή εξάσκησης και να καταλήξει σε θετική χρηματοροή (In the money). Επίσης, ο αγοραστής έχει προστασία από την ενδεχόμενη πτώση της τιμής και το μέγιστο το οποίο μπορεί να χάσει είναι το αντίτιμο που πλήρωσε για το δικαίωμα. Δηλαδή ο



Σχήμα 1.1: Επίδραση των μεταβολών της μεταβλητότητας και του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου στις τιμές των δικαιωμάτων για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$. (Hull [22])

κάτοχος της θέσης αγοράς, παρατηρούμε πως βρίσκεται σε πιο ευνοϊκή θέση από τον κάτοχο της θέσης πώλησης. Καταλαβαίνουμε δηλαδή πως η τιμή του δικαιώματος αγοράς, είναι μία αύξουσα συνάρτηση της μεταβλητότητας. Όμοια συμπεράσματα μπορούν να προκύψουν για θέση αγοράς σε δικαίωμα πώλησης, η οποία επίσης αποτελεί αύξουσα συνάρτηση της μεταβλητότητας.

Αξίζει να σημειωθεί πως στην περίπτωση της μεταβολής του επιτοκίου δίχως κίνδυνο το να διαπιστώσουμε τυχόν μονοτονία δεν είναι τόσο εύκολο όσο και στην περίπτωση της μεταβλητότητας. Από τη μία, (α) αν αυξηθούν τα επιτόκια η αναμενόμενη απόδοση που απαιτούν οι επενδυτές από την μετοχή τείνει να αυξάνεται. Από την άλλη, (β) μια αύξηση των επιτοκίων θα οδηγήσει σε μείωση της παρούσας αξίας των μελλοντικών χρηματοροών των κατόχων των δικαιωμάτων προαίρεσης. Όσον αφορά τα δικαιώματα πώλησης, τα πράγματα είναι ίσως λίγο πιο ξεκάθαρα και επομένως, υποθέτοντας πως οι υπόλοιπες μεταβλητές πλην του επιτοκίου παραμένουν σταθερές, μία αύξηση των επιτοκίων οδηγεί σε μείωση της τιμής τους. Όμως, αν έχουμε ένα δικαίωμα αγοράς, δεν υπάρχει κάποια ξεκάθαρη τάση: Το (α) τείνει να αυξάνει την τιμή, ενώ το (β) τείνει να την μειώνει. Στο Σχήμα 1.1 παρουσιάζουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα αναφορικά με την μεταβλητότητα και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, που συμφωνεί με την παραπάνω ανάλυση (για περισσότερες πληροφορίες στο θέμα αυτό βλ. Φλώρος [10], ή Hull [8]).

Όπως ήδη αναφέραμε, υπάρχουν δύο τύποι δικαιωμάτων προαίρεσης ανάλογα με τον τρόπο εξάσκησης του δικαιώματος:

- Το δικαίωμα αγοράς (call option): δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο/αγαθό σε μία προκαθορισμένη τιμή και χρονική στιγμή στο μέλλον. Για να έχει το δικαίωμα αυτό, ο αγοραστής, καταβάλει ένα ποσό, το λεγόμενο ασφάλιστρο του δικαιώματος (premium). Ο πωλητής ενός δικαιώματος αγοράς, έχει την υποχρέωση να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο/αγαθό στον αγοραστή του δικαιώματος, αν αυτός αποφασίσει να εξασκήσει το δικαίωμά του στην προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης K, ενώ εισπράττει το ασφάλιστρο.

- Το δικαίωμα πώλησης (put option): δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο/αγαθό σε μία προκαθορισμένη τιμή και χρονική στιγμή στο μέλλον. Για να έχει το δικαίωμα αυτό, ο αγοραστής, καταβάλει ένα ποσό, το λεγόμενο ασφάλιστρο του δικαιώματος (premium). Ο πωλητής ενός δικαιώματος πώλησης, έχει την υποχρέωση να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο από τον αγοραστή του δικαιώματος, όταν και εφόσον αυτός εξασκήσει το δικαίωμά του να πουλήσει τον τίτλο στην προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης K.

Υπάρχουν δύο βασικοί τύποι δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς και πώλησης βάσει του χρόνου εξάσκησης και είναι οι εξής:

- Το δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου, το οποίο δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα εξάσκησης μόνο κατά την προκαθορισμένη ημερομηνία λήξης T.
- Το δικαίωμα Αμερικάνικου τύπου, το οποίο δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα εξάσκησης οποιαδήποτε στιγμή αυτός θέλει μέχρι και την ημερομηνία λήξης.

Τέλος, υπάρχουν δύο άλλες θεμελιώδεις κατηγορίες δικαιωμάτων προαίρεσης τις οποίες διακρίνουμε ανάλογα με τη γενικότερη δομή τους είναι οι ακόλουθες:

- Τα απλά δικαιώματα προαίρεσης (plain vanilla options) . Στην κατηγορία αυτή από τα δικαώματα που έχουμε ήδη αναφέρει βρίσκονται τα δικαιώματα προαίρεσης ευρωπαϊκού τύπου.
- Τα εξωτικά δικαιώματα προαίρεσης (exotic options) . Πρόκειτα για τα δικαιώματα προαίρεσης που δεν είναι απλά, δηλαδή ό,τι δεν είναι ευρωπαϊκού τύπου χαρακτηρίζεται ως εξωτικό. Η δομή τους είναι πιο πολύπλοκη από αυτή των Ευρωπαϊκών και συνήθως γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης εξωχρηματιστηριακά (εκτός από τα Αμερικάνικα). Ορισμένοι γνωστοι τύποι εξωτικών δικαιωμάτων είναι, τα Ασιατικά δικαιώματα (Asian options), τα δικαιώματα με φράγματα (Barrier options), τα δυαδικά δικαιώματα (Binary options) κ.α. Για περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με τα εξωτικά δικαιώματα και την τιμολόγησή τους, βλ. Hull [8].

1.3 Θέσεις σε δικαιωμάτα προαίρεσης

Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε στις πιθανές θέσεις τις οποίες μπορεί να λάβει κάποιος επενδυτής πάνω στα δικαιώματα προαίρεσης.

Τι εννοούμε όμως όταν λέμε θέση;

Ουσιαστικά, ο όρος αυτός εκφράζει την προτιθέμενη συναλλαγή όπου πρόκειται να γίνει, έτσι όπως συμφωνείται από το αντίστοιχο παράγωγο. Οι θέσεις τις οποίες μπορεί να λάβει ένας επενδυτής σε ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι δύο: η θέση αγοράς (long position) και η θέση πώλησης (short position) . Ο επενδυτής που λαμβάνει θέση αγοράς, αποφασίζει για το εάν θα εξασκήσει το δικαίωμα που αγόρασε. Από την άλλη, ο κάτοχος της θέσης πώλησης είναι αυτός που εισπράττει το ασφάλιστρο είναι υποχρεωμένος να αγοράσει/πουλήσει εφόσον ο αγοραστής αποφασίσει να εξασκήσει το δικαίωμά του. Για τον κάτοχο της θέσης πώλησης λέμε ότι έχει γράψει το δικαίωμα.

Συνεπώς, οι πιθανές θέσεις που μπορεί να λάβει ένας επενδυτής πάνω σε δικαιώματα προαίρεσης είναι οι εξής:

- Θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς (long call). Ο κάτοχος της θέσης αυτής αποκτά το δικαίωμα να αγοράσει μια ποσότητα ενός αγαθού ή τίτλου σε μια συγκεκριμένη τιμή και χρονική στιγμή στο μέλλον.

- Θέση πώλησης σε δικαίωμα αγοράς (short call): Ο κάτοχος της θέσης αυτής αναλαμβάνει την υποχρέωση να πουλήσει μια ποσότητα ενός αγαθού ή τίτλου σε μια συγκεκριμένη τιμή και χρονική στιγμή στο μέλλον. Για την υποχρέωση αυτή εισπράττει ένα αντίτιμο την στιγμή του συμβολαίου.

- Θέση αγοράς σε δικαίωμα πώλησης (long put). Ο κάτοχος της θέσης αυτής αποκτά το δικαίωμα να πουλήσει μια ποσότητα ενός αγαθού ή τίτλου σε μια συγκεκριμένη τιμή και χρονική στιγμή στο μέλλον.

- Θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης (short put). Ο κάτοχος της θέσης αυτής αναλαμβάνει την υποχρέωση να αγοράσει την υποκείμενη ποσότητα αγαθού ή τίτλου, αν η αντίθετη θέση του δικαιώματος αποφασίσει να πουλήσει. Για την υποχρέωση αυτή εισπράττει ένα αντίτιμο την στιγμή του συμβολαίου.

Πως όμως γίνεται η επιλογή της κατάλληλης θέσης; Αυτό σχετίζεται με τις εκτιμήσεις του κάθε επενδυτή για το πως θα κινηθεί η αγορά. Πιο συγκεκριμένα:

- Αν ο επενδυτής εκτιμά ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου/αγαθού θα ανέβει αρκετά, τότε θα μπορούσε να πάρει θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς. Με αυτό τον τρόπο συνεχίζει να έχει πρόσβαση στα κέρδη από την άνοδο των τιμών και προστασία στην πτώση. Με τη θέση του στο δικαίωμα, το περισσότερο το οποίο μπορεί να χάσει είναι το αντίτιμο που έδωσε το οποίο είναι κατά πολύ μικρότερο από την τιμή του υποκείμενου τίτλου.

- Αν ο επενδυτής εκτιμά ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου/αγαθού θα ανέβει λίγο, τότε θα μπορούσε να λάβει θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης. Με αυτό τον τρόπο καταφέρνει να εισπράξει το ασφάλιστρο (σε περίπτωση που δεν πέσει η τιμή του υποκείμενου στοιχείου) ελπίζοντας ότι η τιμή του υποκείμενου στοιχείου δεν θα πέσει. Βέβαια, υπάρχει ο κίνδυνος ζημιάς με το να εξασκηθεί το δικαίωμα από τον αγοραστή σε περίπτωση όπου η τιμή υποχωρήσει αρκετά.

- Αν ο επενδυτής εκτιμά ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου/αγαθού θα υποχωρήσει αρκετά, τότε θα μπορούσε να λάβει θέση αγοράς σε δικαίωμα πώλησης. Με αυτό τον τρόπο συνεχίζει να έχει πρόσβαση στα κέρδη από την πτώση της τιμής του υποκείμενου στοιχείου και ταυτόχρονα προστασία στην άνοδο, αφού τη θέση αυτή το περισσότερο το οποίο μπορεί να χάσει είναι το αντίτιμο που κατέβαλε το οποίο είναι κατά πολύ μικρότερο από την τιμή του υποκείμενου τίτλου.

- Τέλος, αν ο επενδυτής εκτιμά ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα πέσει λίγο, τότε θα μπορούσε να λάβει θέση πώλησης σε δικαίωμα αγοράς. Με αυτό τον τρόπο καταφέρνει να εισπράξει το ασφάλιστρο ελπίζοντας ότι η τιμή του υποκείμενου στοιχείου δεν θα ανέβει. Βέβαια, υπάρχει ο κίνδυνος ζημιάς με το να εξασκηθεί το δικαίωμα από τον αγοραστή σε περίπτωση όπου η τιμή ανέβει πολύ.

1.3.1 Θέσεις και σχήματα πληρωμών

Έστω ότι έχουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, με τιμή εξάσκησης K, το οποίο είναι γραμμένο πάνω σε μια μετοχή, η τιμή της οποίας είναι σήμερα ίση με S_0 (τρέχουσα τιμή της μετοχής), ενώ η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος ισούται με T. Κατά την ημερομηνία λήξης T ο αγοραστής θα πρέπει να αποφασίσει για το αν θα εξασκήσει το δικαίωμά του ή όχι. Το λογικό είναι να εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς, όταν η τιμή της μετοχής στον χρόνο T, δηλαδή S_T, είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης K, μιας και έτσι θα εισπράξει άμεσα $S_T - K > 0$. Σε αντίθετη περίπτωση, όταν η τιμή της μετοχής στον χρόνο T, δηλαδή S_T, είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης K, ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα και δεν θα εισπράξει τίποτα. Επομένως, η πληρωμή (την οποία συμβολίζουμε με P) ενός τέτοιου δικαιώματος αγοράς, θα είναι για τον κάτοχο θέσης αγοράς ίση με:

$$P = max(S_T - K, 0).$$

Στην περίπτωση όπου $S_T = K$, ο επενδυτής είναι αδιάφορος. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε και την πληρωμή για ένα δικαίωμα πώλησης, με τη διαφορά πως για να εξασκήσει ο αγοραστής το δικαίωμα, θα πρέπει η τιμή της μετοχής στον χρόνο T, δηλαδή S_T, να είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης K. Επομένως, η πληρωμή ενός τέτοιου δικαιώματος πώλησης θα είναι για τον κάτοχο της θέσης αγοράς ίση με:

$$P = max(K - S_T, 0).$$

Το καθαρό κέρδος ή ζημία, προκύπτει αν αφαιρέσουμε (ή προσθέσουμε) από την πληρωμή το ασφάλιστρο που δόθηκε αρχικά από τον αγοραστή, στον πωλητή του δικαιώματος. Με τον τρόπο αυτό, το κέρδος για τον κάτοχο της θέσης αγοράς ενός δικαιώματος αγοράς (P^C) και το αντίστοιχο για τον κάτοχο ενός δικαιώματος πώλησης (P^P) ορίζονται ως εξής:

$$P^C = max(S_T - K, 0) - C_0,$$

και

$$P^P = max(K - S_T, 0) - P_0,$$

όπου C_0 και P_0 το ασφάλιστρο ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης, αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε κέρδος όταν $S_T > K + C_0$, ενώ στην δεύτερη όταν $S_T < K - P_0$. Αντίστοιχα, το κέρδος για τον κάτοχο της θέσης πώλησης ενός δικαιώματος αγοράς ορίζεται ως

$$P^C = -max(S_T - K, 0) + C_0,$$

και για τον κάτοχο της θέσης πώλησης σε δικαίωμα πώλησης ορίζεται ως

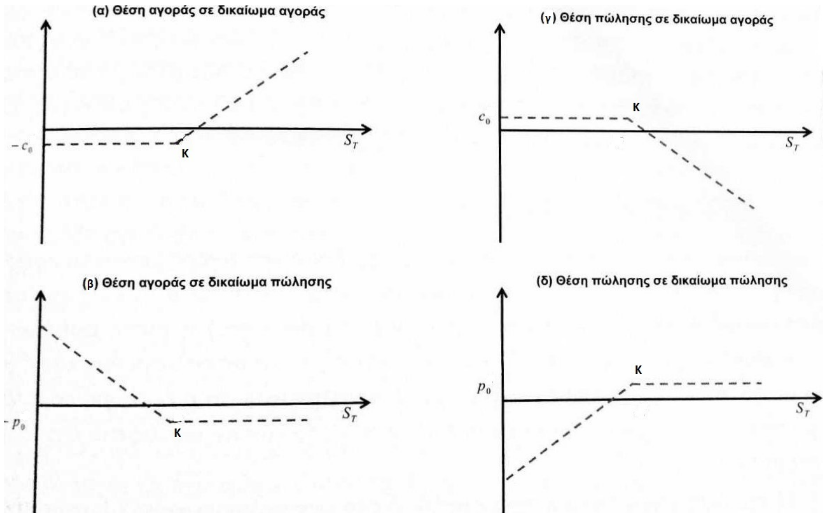
$$P^P = -max(K - S_T, 0) + P_0.$$

Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε κέρδος όταν $S_T < K + C_0$, ενώ στην δεύτερη όταν $S_T > K - P_0$. Τα αντίστοιχα γραφήματα των παραπάνω πληρωμών φαίνονται και στο Σχήμα 1.2.

Τέλος, τα δικαιώματα προαίρεσης χαρακτηρίζονται από την χρηματοροή που προκύπτει από την άμεση εξάσκησή τους, αν συγκρίνουμε την τιμή εξάσκησης με την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου.

- Όταν η εξάσκηση του δικαιώματος οδηγεί σε θετική χρηματοροή, τότε η κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε λέγεται In the money (ITM).
- Όταν η εξάσκηση του δικαιώματος οδηγεί σε αρνητική χρηματοροή, τότε η κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε λέγεται Out of the money (OTM).
- Όταν η εξάσκηση του δικαιώματος οδηγεί σε μηδενική χρηματοροή, τότε η κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε λέγεται At the money (ATM).

Ένα Δικαίωμα πρέπει να εξασκείται μόνο όταν είναι ITM.



Σχήμα 1.2: Κέρδος ή ζημία από τις θέσεις σε Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης (Πουφινάς & Φλώρος [9])

1.4 Βασικά σημεία κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό έγινε μια σύντομη εισαγωγή στα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, με ιδιαίτερη έμφαση στα δικαιώματα προαίρεσης καθώς αποτελούν το αντικείμενο της εργασίας αυτής. Πιο συγκεκριμένα είδαμε:

- Τον ορισμό του χρηματοοικονομικού παραγώγου.
- Τις βασικές κατηγορίες των παραγώγων προϊόντων και τα βασικά τους χαρακτηριστικά.
- Τις βασικές έννοιες των δικαιωμάτων προαίρεσης, τα δομικά τους χαρακτηριστικά και τις βασικές κατηγορίες στις οποίες διακρίνονται.
- Τις θέσεις τις οποίες μπορεί να λάβει κάποιος στα δικαιώματα προαίρεσης και τον τρόπο με τον οποίο θα γίνει η κατάλληλη επιλογή αυτών.
- Τις πληρωμές που προκύπτουν από την κατοχή θέσης σε δικαιώματα προαίρεσης.

Μέρος I

Δικαιώματα σε μία μετοχή

2

Το διωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης

Ένα από τα βασικότερα προβλήματα που απασχολούσε την επιστημονική κοινότητα από τα πρώτα κιόλας χρόνια που γεννήθηκε η Χρηματοοικονομική Μηχανική, τόσο από θεωρητικής όσο και πρακτικής πλευράς, είναι η κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου/υποδείγματος, με βάση το οποίο εξελίσσονται στον χρόνο οι τιμές των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων (πχ. μετοχή). Στην προσπάθεια αυτή, έχουν προταθεί και χρησιμοποιηθεί πάρα πολλά μοντέλα, άλλα σύνθετα και άλλα τόσο απλά όπως ο απλός τυχαίος περίπατος, τον οποίο πρότεινε πρώτος ο Γάλλος μαθηματικός Louis Bachelier [11] στη διδακτορική του διατριβή (με τίτλο 'Theorie de la Speculation') to 1900. Ουσιαστικά ο Bachelier ήταν ο πρώτος που πρότεινε ένα μαθηματικό υπόδειγμα για να περιγράψει την εξέλιξη των τιμών των αξιογράφων στο χρόνο και μάλιστα το υπόδειγμα αυτό αποτέλεσε την βάση για μία πολύ σημαντική στοχαστική διαδικασία, την κίνηση Brown. Βέβαια από τότε μέχρι και σήμερα έχουν υπάρξει και πιο ανεπτυγμένα μοντέλα (όπως πχ. μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας). Το πιο απλό ίσως υπόδειγμα που θα μπορούσε κάποιος να φανταστεί (και παρά τον απλό του χαρακτήρα του παίζει καθοριστικό ρόλο στο πεδίο της τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης αλλά και της Χρηματοοικονομικής Μηχανικής), είναι το υπόδειγμα κατά το οποίο η τιμή της μετοχής την επόμενη χρονική στιγμή μπορεί να πάρει δύο διαφορετικές τιμές: είτε να ανέβει είτε να πέσει, κάτι που μπορεί να ακούγεται απλό αλλά όπως όμως θα δούμε παρακάτω φτιάχνει ένα πολύ ρεαλιστικό πλαίσιο για την την τιμολόγηση ενός δικαιώματος προαίρεσης. Το υπόδειγμα αυτό αποτελεί έναν από τους πιο γνωστούς και ευρέως εφαρμοσμένους τρόπους για την τιμολόγηση ενός δικαώματος προαίρεσης και προτάθηκε αρχικά από τον Sharpe [27] το 1978 και αργότερα επεκτάθηκε από τους Cox, Ross και Rubinstein [19] το 1979 και ήρθε στη μορφή που είναι σήμερα, γνωστό ως το λεγόμενο διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης ή διωνυμικό δένδρο τιμολόγησης. Το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης βασίζεται ίσως στον πιο απλό τρόπο για να περιγραφεί η εξέλιξη της τιμής του υποκείμενου αγαθού (έστω μετοχή) στο χρόνο. Υποθέτει, ότι την επόμενη χρονικη στιγμή η τιμή της μετοχής πάνω στην οποία είναι γραμμένο το δικαίωμα είτε θα ανέβει είτε θα πέσει (για αυτό λέγεται και διωνυμικό). Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διωνυμικό δέντρο σε μία περίοδο, επομένως έχουμε δύο πιθανά σενάρια για την έκβαση της μετοχής την επόμενη χρονική στιγμή, επομένως και δύο πιθανές καταστάσεις για το δικαίωμα. Αυτό βέβαια δεν είναι ρεαλιστικό, καθώς έχουμε μόνο δύο πιθανές καταστάσεις της οικονομίας. Μία που αντιστοιχεί στην ανοδική πορεία της μετοχής πάνω στην οποία είναι γραμμένο το δικαίωμα και μία στην καθοδική της πορεία. Ιδανικά θα θέλαμε πολλά σενάρια, ώστε να κάνουμε τα πράγματα πιο ρεαλιστικά. Ένας τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να θεωρήσουμε πολλές χρονικές περιόδους και αυτό μπορεί να συμβεί χωρίζοντας το διάστημα ζωής του δικαιώματος σε πολύ μικρά κομμάτια, δημιουργώντας με τον τρόπο αυτό πολλές υποπεριόδους και υποθέτοντας ότι κάθε μία από αυτές μπορεί να είναι η περίοδος συναλλαγής. Έτσι καταφέρνουμε να φθάσουμε στο τέλος του δένδρου και να έχουμε πάρα πολλά διαφορετικά σενάρια για την τελική τιμή της μετοχής και επομένως και για το δικαίωμα. Για παράδειγμα, αν χωρίσουμε το δένδρο σε πέντε υποπεριόδους καταλήγουμε σε έξι πιθανά σενάρια αναφορικά με την τελική τιμή της μετοχής. Η τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης Ευρωπαϊκού (εξάσκηση μόνο στην λήξη) και Αμερικάνικου (εξάσκηση οποτεδήποτε μέχρι και την λήξη) τύπου, γίνεται σήμερα αποτελεσματικά με την βοήθεια του υποδείγματος αυτού.

Στο σημείο αυτό και πριν προχωρήσουμε περισσότερο στην ανάλυσή μας θα αναφερθούμε σε κάποιες υποθέσεις - απλουστεύσεις τις οποίες θα ακολουθήσουμε στο μοντέλο:

- Στην αγορά δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών και φόροι.
- Οι συναλλασσόμενοι μπορούν να δανείζουν και να δανείζονται με το ίδιο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, $r > 0$.
- Οι επενδυτές είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο.
- Επιτρέπεται το short selling*, όπως επίσης και η κατοχή ποσοστού ενός τίτλου.
- Η τιμή πώλησης είναι ίδια με την τιμή αγοράς για όλους τους τίτλους.
- Μπορούμε να αγοράσουμε ή να πουλήσουμε στην αγορά ό,τι ποσότητες επιθυμούμε.
- Μπορούμε να δανειστούμε όσα χρήματα επιθυμούμε από την τράπεζα.
- Ο υποκείμενος τίτλος (μετοχή) δεν πληρώνει μερίσματα.

Τονίζουμε τέλος πως σε ότι ακολουθεί στην εργασία αυτή θα κάνουμε συνεχή ανατοκισμό για ευκολία πράξεων με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, όπου $r > 0$.

2.1 Το διωνυμικό υπόδειγμα σε μία περίοδο

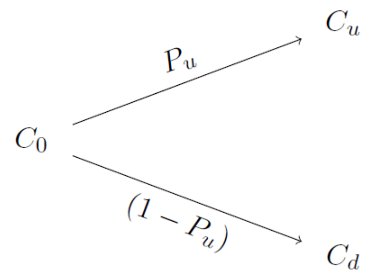
Θεωρούμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης αγοράς που είναι γραμμένο σε μετοχή που δεν πληρώνει μέρισμα με αρχική τιμή S_0, τιμή εξάσκησης K και χρόνο έως τη λήξη $T = 1$, το οποίο δεν πληρώνει μέρισμα. Αρχικά θα εξετάσουμε το διωνυμικό δέντρο μιας περιόδου. Θεωρούμε ένα χρονικό διάστημα μήκους $\delta t > 0$, μεταξύ των χρονικων στιγμών $t = 0$ και $t = t_1 > 0$. Συμβολίζουμε την τρέχουσα τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t = 0$ με S_0, (με $S_0 > 0$) ενώ με $S_{t1} := S_1 > 0$ συμβολίζουμε την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t = t_1$. Αρχικά η τιμή της μετοχής μας είναι γνωστή μέσω της παρατήρησής της στην χρηματιστηριακή αγορά, ενώ στη συνέχεια λόγω της αβεβαιότητας σε σχέση με την εξέλιξη των μελλοντικών τιμών της, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε με βεβαιότητα την τιμή της κατά τη χρονική στιγμή $t = t_1$, μιας και πρόκειται για μία τυχαία μεταβλητή. Όπως αναφέραμε παραπάνω, μία από τις βασικότερες υποθέσεις του διωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης είναι πως η εξέλιξη της υποκείμενης μετοχής πάνω στην οποία είναι γραμμένο το δικαίωμα μπορεί να πάρει μόνο δύο διαφορετικές τιμές καθώς πηγαίνουμε από την χρονική στιγμή $t = 0$ στην χρονική στιγμή $t = t_1$: μία ανοδική και μία καθοδική. Έτσι την χρονική στιγμή $t = 0$, η τιμή της μετοχής είναι S_0 και την επόμενη χρονική στιγμή ($t = t_1$) μπορεί να κινηθεί ανοδικά και να γίνει: $S_u = S_0 u$, με πιθανότητα P_u, είτε καθοδικά και να γίνει $S_d = S_0 d$, με πιθανότητα P_d. Οι ποσότητες u και d αποτελούν τις παραμέτρους ανοδικής και καθοδικής κίνησης της μετοχής αντίστοιχα και υποθέτουμε ότι ισχύει $u > 1 > d > 0$. Αναφορικά με τις παραμέτρους αυτές, οι οποίες όπως θα δούμε στη συνέχεια παίζουν καθοριστικό ρόλο στην τιμολόγηση με το υπόδειγμα αυτό, θα επεκταθούμε στην συνέχεια (βλ. Παράγραφο 2.5.3). Έτσι, τα δύο πιθανά σενάρια για την αξία του δικαιώματος στο χρόνο λήξης (Σχήμα 2.1) είναι τα εξής:

- Να αυξηθεί η τιμή της μετοχής, οπότε η απόδοση του δικαιώματος είναι ίση με

$$C_u = max(S_u - K, 0) = max(S_0 u - K, 0).$$

- Να μειωθεί η τιμή της μετοχής, οπότε η απόδοση του δικαιώματος είναι ίση με

$$C_d = max(S_d - K, 0) = max(S_0 d - K, 0).$$



Σχήμα 2.1: Το διωνυμικό δένδρο σε μία περίοδο.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, το θέμα με το οποίο θα ασχοληθούμε στη συνέχεια, είναι ο τρόπος με τον οποίο θα υπολογίσουμε την τιμή C_0, η οποία αντιστοιχεί στην αξία του δικαιώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$. Μία θέση την οποία θα μπορούσαμε να λάβουμε για την τιμολόγηση του δικαιώματος είναι η θέση του πωλητή στο παραπάνω δικαίωμα. Ο πωλητής του δικαιώματος εισπράττει ένα χρηματικό ποσό C_0 (ασφάλιστρο) ως αντάλλαγμα για την υποχρέωση που αναλαμβάνει τη χρονική στιγμή $t = 0$, για να τηρήσει την συμφωνία. Εάν ο αγοραστής αποφασίσει να εξασκήσει το δικαίωμα (και αυτό συμβαίνει όταν το δικαίωμα λήξει ITM), τότε ο πωλητής είναι υποχρεωμένος να του παραδώσει την υποκείμενη μετοχή στον χρόνο $t = t_1$ στην τιμή K. Με άλλα λόγια, εφόσον υπάρξει άνοδος στην τιμή της μετοχής από S_0 σε S_0u, και ισχύει ότι $S_0u > K$ (δηλαδή το δικαίωμα λήξει ITM), τότε ο πωλητής πρέπει να παραχωρήσει τη μετοχή στον κάτοχο του δικαιώματος στην προσυμφωνημένη τιμή K. Για τον παραπάνω λόγο, δηλαδή για την εξασφάλιση όπως είπαμε του πωλητή από τον κίνδυνο στον οποίο είναι εκτεθειμένος (δηλαδή να αναγκαστεί να πουλήσει την μετοχή σε μία μη συμφέρουσα τιμή), ο πωλητής αποφασίζει να κάνει αντιστάθμιση μέσω της κατασκευής ενός χαρτοφυλακίου. Δημιουργούμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από δύο βασικούς τίτλους της αγοράς (μετοχή, ομόλογο). Πιο συγκεκριμένα, το χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται από τις εξής θέσεις:

- Δ_0 κομμάτια της υποκείμενης μετοχής πάνω στην οποία είναι γραμμένο το δικαίωμα, με αρχική τιμή S_0.
- Έναν τίτλο χωρίς κίνδυνο (ομόλογο), με αρχικό ποσό $B_0 = 1$, στον οποίο έχει επενδυθεί ποσό Ψ.

Έτσι η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ίση με:

$$C_0 = \Delta_0 S_0 + \Psi B_0 = \Delta_0 S_0 + \Psi \tag{2.1}$$

Αν υπάρξει άνοδος της τιμής της μετοχής, τότε η τιμή της είναι ίση με S_0u και η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή $t = t_1$ γίνεται:

$$C_u = \Delta_0 S_0 u + \Psi e^{r\delta t} \tag{2.2}$$

ενώ, αν υπάρξει κάθοδος της τιμής της μετοχής, τότε η τιμή της είναι ίση με S_0d και η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή $t = t_1$ γίνεται:

$$C_d = \Delta_0 S_0 d + \Psi e^{r\delta t} \tag{2.3}$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε κατάλληλα τα Δ και Ψ του χαρτοφυλακίου, ώστε να εκτιμήσουμε την αξία του δικαιώματος. Λύνοντας το σύστημα 2.2 και 2.3 παίρνουμε:

[*] δανειζόμαστε τον τίτλο και τον πουλάμε, χωρίς να τον διαθέτουμε στην κατοχή μας.

$$\Delta_0 S_0(u-d) = C_u - C_d,$$

και τελικά καταλήγουμε ότι:

$$\Delta_0 = \frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)}. \tag{2.4}$$

Έπειτα, γνωρίζοντας το Δ_0, το αντικαθιστούμε στην Εξίσωση 2.1 και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το Ψ. Καταλήγουμε τελικά πως:

$$\Psi = e^{-r\delta t}\frac{uC_d - dC_u}{u-d}. \tag{2.5}$$

Το παραπάνω χαρτοφυλάκιο ονομάζεται χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης, γιατί βασικός του στόχος είναι να αντισταθμίσει τον πωλητή απέναντι στον κίνδυνο που αντιμετωπίζει, να πουλήσει δηλαδή πιο φθηνά από ότι θα μπορούσε στην άμεση (χρηματιστηριακή) αγορά. Το κλειδί για την προσέγγιση αυτή είναι ο νόμος της μίας τιμής:

Πρόταση 1. *[Νόμος της μίας τιμής] βλ. Μπαλτάς [6]* Έστω ότι σήμερα δύο επενδύσεις κοστίζουν C_1 και C_2 αντίστοιχα. Εάν η παρούσα αξία των μελλοντικών χρηματοροών της πρώτης επένδυσης C_1, ισούται πάντα με την παρούσα αξία των μελλοντικών χρηματοροών της δεύτερης C_2, για να μην υπάρξει ευκαιρία για arbitrage, θα πρέπει να ισχύει ότι $C_1 = C_2$.

Θα πρέπει δηλαδή η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου να είναι ίση με την τιμή του δικαιώματος στον χρόνο $t = 0$, να ισχύει δηλαδή η σχέση:

$$C_0 = \Delta_0 S_0 + \Psi \tag{2.6}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξίσωση 2.6, τις Εξισώσεις 2.4 και 2.5, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
C_0 = \Delta S_0 + \Psi &= \frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)}S_0 + e^{-r\delta t}\frac{uC_d - dC_u}{u-d} \\
&= \frac{C_u - C_d}{(u-d)} + e^{-r\delta t}\frac{uC_d - dC_u}{u-d} = \frac{uC_d - dC_u + e^{r\delta t}C_u - e^{r\delta t}C_u}{(u-d)\,e^{r\delta t}} \\
&= e^{-r\delta t}\left[\frac{u - e^{r\delta t}}{u-d}C_d + \frac{e^{r\delta t} - d}{u-d}C_u\right].
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι η τιμή του δικαιώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ δίνεται από τη σχέση:

$$C_0 = e^{-r\delta t}\left[P_u C_u + P_d C_d\right], \tag{2.7}$$

όπου θέσαμε σαν

$$P_u = \frac{e^{r\delta t} - d}{u-d}, \qquad P_d = \frac{u - e^{r\delta t}}{u-d}.$$

Οι ποσότητες P_u και P_d, δεν αναφέρθηκαν τυχαία και θα παίξουν πολύ σημαντικό ρόλο στην τιμολόγηση. Διακρίνουμε κάποια βασικά τους χαρακτηριστικά:

- $P_u + P_d = 1$. Αυτό μπορεί κάποιος να το δει άμεσα κάνοντας πράξεις.
- Αν υποθέσουμε ότι $d < e^{r\delta t} < u$, τότε $P_u, P_d > 0$ (κάτι το οποίο πρέπει να ισχύει, ώστε να αποκλείσουμε ευκαιρίες για arbitrage. (βλ. Πρόταση 2).

Θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε τις ποσότητες αυτές σαν πιθανότητες και μάλιστα ουδέτερες ως προς τον κίνδυνο (βλ. Παρατήρηση 1). Καταλήξαμε έτσι πως τα παραπάνω μοιάζουν με πιθανότητες και μάλιστα στο πεδίο της τιμολόγησης με το διωνυμικό δένδρο τις ονομάζουμε *τεχνητές πιθανότητες*.

Πρόταση 2 (Bjork [12])**.** Εάν δεν ισχύει η ανισότητα $d < e^{r\delta t} < u$, τότε δημιουργούνται ευκαιρίες για arbitrage.

Απόδειξη. (Η απόδειξη είναι μία μικρή επέκταση του Bjork [12]). Πολλαπλασιάζοντας όλα τα μέλη της ανισότητας με S_0, έχουμε ότι $S_0 d < S_0 e^{r\delta t} < S_0 u$. Στο σημείο αυτό διακρίνουμε δύο διαφορετικά σενάρια.

Α σενάριο. Έστω $S_0 e^{r\delta t} < S_0 d < S_0 u$. Για να επιτύχουμε arbitrage σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει την χρονική στιγμή $t = 0$ να δανειστούμε για χρονικό διάστημα δt με επιτόκιο r, ποσό S_0 και να αγοράσουμε τη μετοχή. Κατά την χρονική στιγμή $t_1 > 0$:

- Αν υπάρξει ανοδική κίνηση της τιμής της μετοχής, δηλαδή $S_1 = S_0 u$, πουλάμε την μετοχή και εισπράττουμε $S_0 u$. Αποπληρώνουμε το δάνειο το οποίο κοστίζει $S_0 e^{r\delta t}$, δημιουργώντας καθαρό κέρδος $S_0 u - S_0 e^{r\delta t} > 0$.

- Αν υπάρξει καθοδική κίνηση της τιμής της μετοχής, δηλαδή $S_1 = S_0 d$, πουλάμε την μετοχή και εισπράττουμε $S_0 d$. Αποπληρώνουμε το δάνειο το οποίο κοστίζει $S_0 e^{r\delta t}$, δημιουργώντας καθαρό κέρδος $S_0 d - S_0 e^{r\delta t} > 0$.

Β σενάριο. Έστω $S_0 d < S_0 u < S_0 e^{r\delta t}$. Για να εξασφαλίσουμε arbitrage σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει την χρονική στιγμή $t = 0$ να δανειστούμε την μετοχή (ανοιχτή πώληση) και να εισπράξουμε ποσό S_0. Καταθέτουμε αυτό το ποσό στην τράπεζα με επιτόκιο r για χρονικό διάστημα δt, έως τη χρονική στιγμή t_1. Έπειτα, την χρονική στιγμή $t_1 > 0$, εισπράττουμε από την τράπεζα το ποσό $S_0 e^{r\delta t}$. Επίσης, την χρονική στιγμή t_1 είμαστε υποχρεωμένοι να επιστρέψουμε την μετοχή που δανειστήκαμε.

- Αν υπάρξει ανοδική κίνηση της τιμής της μετοχής, δηλαδή $S_1 = S_0 u$, αγοράζουμε την μετοχή στην τιμή $S_0 u$ και την επιστρέφουμε, κλείνοντας την θέση μας. Έτσι έχουμε καθαρό κέρδος $S_0 e^{r\delta t} - S_0 u > 0$.

- Αν υπάρξει καθοδική κίνηση της τιμής της μετοχής, δηλαδή $S_1 = S_0 d$, αγοράζουμε την μετοχή στην τιμή $S_0 d$ και την επιστρέφουμε, κλείνοντας την θέση μας. Έτσι έχουμε καθαρό κέρδος $S_0 e^{r\delta t} - S_0 d > 0$.

Ανεξαρτήτως ανόδου ή καθόδου της τιμής της μετοχής είναι φανερό πως μπορούμε να πετύχουμε βέβαιο κέρδος. Πλέον απομένει να δούμε πως αν η ανισότητα αυτή ισχύει, δεν δημιουργούνται ευκαιρίες για βέβαιο κέρδος. Πλέον απομένει μόνο να δούμε εάν ισχύει η ανισότητα $d < e^{rdt} < u$ δεν δημιουργούνται ευκαιρίες για arbitrage. Έστω πως ισχύει η ανισότητα $d < e^{rdt} < u$ και φτιάχνουμε ένα χαρτοφυλάκιο (Δ, Ψ) με αρχική αξία μηδέν (εδώ θεωρούμε $\Psi > 0$.) Αυτό συνεπάγεται $\Delta_0 S_0 + \Psi = 0$ ή διαφορετικά $\Psi = -\Delta_0 S_0$. Η τελική αξία του χαρτοφυλακίου αυτού θα είναι:

$$\Delta_0 S_0 u + \Psi e^{rdt} = \Delta_0 S_0 (u - e^{rdt}),$$

εάν η μετοχή κινηθεί ανοδικά και :

$$\Delta_0 S_0 d + \Psi e^{rdt} = \Delta_0 S_0 (d - e^{r\delta t}),$$

εάν η μετοχή κινηθεί καθοδικά. Στην περίπτωση όπου $\Psi < 0$, αυτό συνεπάγεται $\Delta S_0 - \Psi = 0$ ή διαφορετικά $\Psi = \Delta_0 S_0$. Η τελική αξία του χαρτοφυλακίου αυτού θα είναι:

$$\Delta_0 S_0 u + \Psi e^{rdt} = \Delta_0 S_0 (u + e^{r\delta t}),$$

εάν η μετοχή κινηθεί ανοδικά και :

$$\Delta_0 S_0 d + \Psi e^{r\delta t} = \Delta_0 S_0 (d + e^{r\delta t}),$$

εάν η μετοχή κινηθεί καθοδικά. Για να έχουμε παραπάνω ευκαιρία για βέβαιο κέρδος θα πρέπει το $u > e^{rdt}$ και ταυτόχρονα το $d > e^{rdt}$, το οποίο φυσικά δεν συμβαίνει. Επομένως υπό αυτές τις προϋποθέσεις, δεν δημιουργούνται ευκαιρίες για arbitrage. ■

Παρατήρηση 1. Αν P_u η πιθανότητα ανόδου και P_d η πιθανότητα καθόδου, η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής S_1 κάτω από τις τεχνητές πιθανότητες P_u και P_d είναι ίση με:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}\left[S_1\right] &= P_u S_0 u + P_d S_0 d = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} S_0 u + \frac{u - e^{r\delta t}}{u - d} S_0 d \\
&= \frac{S_0}{u - d}\left[u e^{r\delta t} - ud + ud - d e^{r\delta t}\right] = \frac{S_0}{u - d} e^{r\delta t}(u - d) \\
&= S_0 e^{r\delta t}
\end{aligned}$$

Όπου με $\tilde{E}\left[S_1\right]$ συμβολίζουμε τη μέση τιμή υπό τις πιθανότητες P_u και P_d. Κάτω υπό αυτές τις συνθήκες, η αναμενόμενη απόδοση μίας ποσότητας που περιέχει κίνδυνο, ισούται με κάτι που δεν εμπεριέχει κίνδυνο, για το λόγο αυτό λέμε πως οι τεχνητές πιθανότητες P_u και P_d ονομάζονται ουδέτερες ως προς τον κίνδυνο πιθανότητες (risk neutral probabilities). Η παραπάνω πρόταση, είναι πολύ σημαντική γιατί μας επιτρέπει να εκφράσουμε την τιμή του δικαιώματος ως μια προεξοφλημένη μέση τιμή υπό τις πιθανότητες P_u και P_d. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή C που παίρνει τις τιμές C_u με πιθανότητα P_u και C_d με πιθανότητα P_d, τότε, η Εξίσωση 2.7 (η οποία δίνει την τιμή του δικαιώματος κατά την χρονική στιγμή $t = 0$), ερμηνεύεται ως η προεξοφλημένη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής C κάτω από τις πιθανότητες που κατασκευάσαμε προηγουμένως:

$$\begin{aligned}
C_0 &= e^{-r\delta t}\tilde{E}\left[C\right] \\
&= e^{-r\delta t}\left[P_u C_u + P_d C_d\right].
\end{aligned}$$

2.2 Το διωνυμικό υπόδειγμα σε δύο περιόδους

Στην προηγούμενη ενότητα, είδαμε το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης σε μία περίοδο, κατά το οποίο η μετοχή μπορεί να πάρει μόνο δύο διαφορετικές τιμές στην λήξη του δικαιώματος (στην επόμενη χρονική στιγμή t_1). Θεωρήσαμε μόνο δύο σενάρια, να ανέβει ή να πέσει η τιμή της μετοχής στο επόμενο χρονικό βήμα, το οποίο ήταν και το τελικό, στον χρόνο $t_1 = T$. Όπως όμως αναφέραμε, το μοντέλο θα δίνει πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα εάν θεωρήσουμε και άλλα πιθανά σενάρια και αυτό μπορεί να γίνει αν θεωρήσουμε περισσότερες ενδιάμεσες στιγμές μεταξύ των χρονικών στιγμών $t = 0$ και $t = T$. Καταρχάς, θα επεκτείνουμε την ανάλυση που κάναμε για το μοντέλο μίας περιόδου και θα προσθέσουμε μία ακόμα χρονική περίοδο στο μοντέλο, καταλήγοντας με τον τρόπο αυτό σε τρία διαφορετικά τελικά σενάρια (σε αντίθεση με τα δύο τελικά σενάρια που είχαμε στο υπόδειγμα της μίας περιόδου).

Στο διωνυμικό δένδρο σε μία περίοδο που εξετάσαμε στην Παράγραφο 2.1, θεωρήσαμε μόνο ένα χρονικό διάστημα, αυτό μεταξύ των χρονικών στιγμών $t = 0$ και $t = t_1 > 0$, όπου η στιγμή $t = t_1$ ήταν και και ο χρόνος λήξης του δικαιώματος. Τώρα, θα θεωρήσουμε μία ακόμη χρονική στιγμή, την $t = t_2 > t_1$, η οποία στην περίπτωση αυτή ταυτίζεται με τον χρόνο λήξης του δικαιώματος. Όσον αφορά τώρα τις τιμές της μετοχής, συμβολίζουμε με $S_0 > 0$ την τιμή της μετοχής κατά την χρονική στιγμή $t = 0$, με $S_{t_1} := S_1 > 0$ την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t = t_1$ και $S_{t_2} := S_2 > 0$ την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t = t_2$. Η τιμή της μετοχής κατά την χρονική στιγμή

$t = 0$ (σήμερα δηλαδή) μας είναι γνωστή παρατηρώντας την στην χρηματιστηριακή αγορά, όχι όμως και αυτές της S_1 και της S_2 η οποίες είναι τυχαίες μεταβλητές. Για να υπολογίσουμε τις πιθανές τιμές της υποκείμενης μετοχής στον χρόνο λήξης, για δύο περιόδους, θα ακολουθήσουμε την ίδια ιδέα με αυτή του διωνυμικού δένδρου σε μία περίοδο.

Πιο αναλυτικά, αρχίζοντας από την χρονική στιγμή $t = 0$, την χρονική στιγμή $t = t_1$ η τιμή της μετοχής μπορεί να κινηθεί ανοδικά και να γίνει $S_u = S_0u$, με πιθανότητα P_u, είτε καθοδικά και να γίνει $S_d = S_0d$, με πιθανότητα P_d. Αν η τιμή της μετοχής γίνει S_u, η απόδοση του δικαιώματος θα είναι ίση με $C_u = max(S_u - K, 0)$, ενώ αν η τιμή της μετοχής γίνει S_d, τότε η απόδοση του δικαιώματος θα είναι ίση με $C_d = max(S_d - K, 0)$. Έστω τώρα ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση κατά την οποία η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t = t_1$ ισούται με S_0u. Στο σημείο αυτό, μας ενδιαφέρουν οι πιθανές τιμές της μετοχής κατά την επόμενη χρονική στιγμή, δηλαδή την $t = t_2$, η οποία τυχαίνει να είναι και η χρονική στιγμή λήξης του δικαιώματος. Από το σημείο αυτό, θεωρούμε ότι την επόμενη χρονική στιγμή, η μετοχή μπορεί να κινηθεί είτε ανοδικά, στην τιμή $S_{uu} = S_0uu = S_0u^2$, με πιθανότητα P_u, είτε καθοδικά, στην τιμή $S_{ud} = S_0ud = S_0$, με πιθανότητα P_d (λόγω της σύμβασης ότι $ud = 1$, βλ. Παράγραφο 2.5.3). Με τον ίδιο τώρα τρόπο σκέψης, έστω ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση κατά την οποία η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t = t_1$ ισούται με S_0d. Μας ενδιαφέρουν οι πιθανές τιμές της μετοχής την επόμενη χρονική στιγμή, δηλαδή την στιγμή $t = t_2$. Από το σημείο αυτό θεωρούμε ότι την επόμενη χρονική στιγμή, η μετοχή μπορεί να κινηθεί είτε ανοδικά, στην τιμή $S_{du} = S_0du = S_0$, με πιθανότητα P_u , είτε καθοδικά, στην τιμή $S_{dd} = S_0dd = S_0d^2$, με πιθανότητα P_d. Αν η τιμή της μετοχής γίνει S_{uu}, η απόδοση του δικαιώματος θα είναι ίση με

$$C_{uu} = max[S_{uu} - K, 0] = max[S_0u^2 - K, 0],$$

ενώ αν η τιμή της μετοχής γίνει S_{ud}, τότε η απόδοση του δικαιώματος θα είναι ίση με

$$C_{ud} = max[S_{ud} - K, 0] = max[S_0ud - K, 0].$$

Αν η τιμή της μετοχής γίνει S_{dd}, τότε η απόδοση του δικαιώματος θα είναι ίση με

$$C_{dd} = max[S_{dd} - K, 0] = max[S_0d^2 - K, 0].$$

Σκοπός μας είναι να φτάσουμε στο C_0, το οποίο αποτελεί και την τιμή του δικαιώματος σήμερα. Αυτό γίνεται πηγαίνοντας προς τα πίσω στο δένδρο, δουλεύοντας τοπικά με δένδρα μίας περιόδου, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.2, με την βοήθεια της Εξίσωσης 2.7. Πιο αναλυτικά, από το πάνω δένδρο του Σχήματος 2.2 καταλήγουμε ότι:

$$C_u = e^{-r\delta t}\left[P_uC_{uu} + P_dC_{ud}\right],$$

και από το κάτω δένδρο του Σχήματος 2.2 καταλήγουμε ότι:

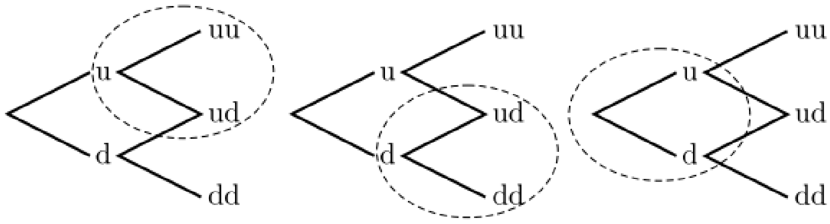
$$C_d = e^{-r\delta t}\left[P_uC_{ud} + P_dC_{dd}\right].$$

Επομένως, η τιμή του δικαιώματος την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ίση με:

$$C_0 = e^{-r\delta t}\left[P_uC_u + P_dC_d\right].$$

2.3 Αλγοριθμική προσέγγιση διωνυμικού υποδείγματος

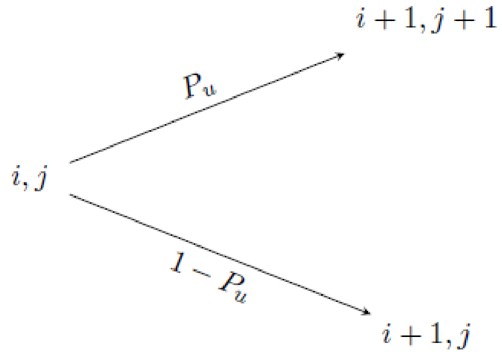
Όπως είδαμε και από τις προηγούμενες παραγράφους, το διωνυμικό υπόδειγμα σε μία και δύο περιόδους είναι απλό στην λειτουργία του και μπορεί να λυθεί και με το χέρι. Εδώ όμως προκύπτει



Σχήμα 2.2: Δουλεύοντας τοπικά με διωνυμικά δένδρα δύο περιόδων, πηγή: Capinski [18]

ένα σημαντικό ερώτημα. Τι συμβαίνει αν έχουμε πολλές περιόδους (π.χ. $N = 50$); Στην περίπτωση αυτή είμαστε αναγκασμένοι να καταφύγουμε στην βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή, επομένως πρέπει να κατασκευάσουμε έναν δομημένο αλγόριθμο για την διεκπεραίωση της διαδικασίας αυτής. Στην ενότητα αυτή θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο θα προσεγγίσουμε αλγοριθμικά το πρόβλημα της τιμολόγησης με το διωνυμικό υπόδειγμα σε παραπάνω από δύο περιόδους. Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.3, η φιλοσοφία είναι η ίδια με αυτήν που είδαμε προηγουμένως: ξεκινάμε από το τέλος του δένδρου και πηγαίνουμε προς τα πίσω, μιας και στόχος μας είναι να φτάσουμε στην αρχή του δένδρου, η οποία αντιστοιχεί στην τιμή C_0, δουλεύοντας κάθε φορά τοπικά με δένδρα μίας περιόδου. Στην προηγούμενη παράγραφο, αρχικά υπολογίσαμε την τιμή C_u και έπειτα την τιμή C_d και για να υπολογίσουμε την τιμή C_0 εφαρμόζουμε την Εξίσωση 2.7 χρησιμοποιώντας τις τιμές C_u και C_d που βρήκαμε, καθώς επίσης και τον συντελεστή προεξόφλησης $e^{-r\delta t}$. Στην γενική περίπτωση τώρα, που έχουμε παραπάνω από δύο περιόδους, χωρίζουμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ όπου $T > 0$ η λήξη ζωής του δικαιώματος σε πολλά υποδιαστήματα $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < T_N = T$ και φανταζόμαστε ότι κάθε ένα θα μπορούσε να είναι χρόνος συναλλαγής. Φτιάχνουμε έτσι ένα μεγάλο δένδρο που αποτελείται από πολλά μικρά δένδρα μιας περιόδου. Ουσιαστικά, έχουμε ένα δένδρο δύο καταστάσεων που αποτελείται από κόμβους (i, j), όπου $(i, j \in \mathbf{N})$, κάθε ένας από τους οποίους αντιστοιχεί και σε μια διαφορετική κατάσταση της οικονομίας. Ο οριζόντιος ιδεατός άξονας $(i, i = 0, 1, ..., T)$ του δέντρου, αντιστοιχεί στο χρόνο και συγκεκριμένα στο πόσο μακρυά βρισκόμαστε από την αρχή του δένδρου. Αντίθετα, ο κάθετος $(j,\ j = 0, ..., i)$ μας δείχνει πόσες ανοδικές κινήσεις έχει κάνει η μετοχή από την αρχή για να φτάσει εκεί, δηλαδή αντιστοιχεί κατά κάποιο τρόπο στις διαφορετικές καταστάσεις της οικονομίας. Παρατηρούμε από το δέντρο, πως ο κάθε κόμβος μας οδηγεί σε άλλους δύο κόμβους, οι οποίοι αντιστοιχούν σε μια ανοδική και καθοδική κίνηση της μετοχής και συγκεκριμένα εδώ ακολουθούμε τον ορισμό πως ο κόμβος (i, j) μας οδηγεί στον κόμβο $(i+1, j)$ είτε στον $(i+1, j+1)$, όπου ο κόμβος $(i+1, j)$ εκφράζει την καθοδική κίνηση της μετοχής την επόμενη χρονική στιγμή, ενώ ο κόμβος $(i + 1, j + 1)$ την ανοδική. (βλ. Σχήμα 2.3.)

Για να γίνει κατανοητή η προσέγγιση αυτή, θα εξετάσουμε το διωνυμικό δένδρο για την περίπτωση που έχουμε μόνο $N = 2$ περιόδους (βλ. Σχήμα 2.4). Βάσει των όσων έχουμε πει, παρατηρούμε ότι ο κάθε κόμβος μπορεί να οδηγήσει σε άλλους δύο κόμβους οι οποίοι αντιστοιχούν σε ανοδική ή καθοδική κίνηση της μετοχής. Πιο συγκεκριμένα, ο κόμβος (i, j) μπορεί να μας οδηγήσει είτε στον κόμβο $(i + 1, j + 1)$ που εκφράζει την ανοδική κίνηση της μετοχής την επόμενη χρονική στιγμή, είτε στον κόμβο $(i + 1, j)$ που εκφράζει την καθοδική κίνηση της μετοχής την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή. Δηλαδή από τον κόμβο (0,0) μπορούμε να μεταβούμε την επόμενη χρονική στιγμή, είτε στον κόμβο (1,1), ο οποίος αντιστοιχεί σε άνοδο, είτε στον κόμβο (1,0), που σημαίνει ότι η τιμή της μετοχής την επόμενη χρονική στιγμή έπεσε (δηλαδή δεν ανέβηκε). Με τον ίδιο τρόπο, από τον κόμβο (1,1) μπορούμε να μεταβούμε στους κόμβους (2,2) και (2,1). Αυτό σημαίνει, πως βρισκόμαστε δύο βήματα μακρυά από τον κόμβο (0,0) και η τιμή της μετοχής έχει ανέβει δύο φορές γα να φτάσει στον κόμβο (2,2) [από το (0,0) στο (1,1) και από το (1,1) στο (2,2)], ενώ αν μεταβούμε στον κόμβο (2,1) σημαίνει πως βρισκόμαστε δύο βήματα μακρυά από τον κόμβο (0,0) και ότι η τιμή



Σχήμα 2.3: Ο γενικός κόμβος του διωνυμικού δένδρου

της μετοχής έχει ανέβει μία φορά και έχει πέσει άλλη μία για να φτάσει στον κόμβο αυτό [δηλαδή από το (0,0) στο (1,1) και από το (1,1) στο (2,1) ή από το (0,0) στο (1,0) και από το (1,0) στο (2,1)]. Αντίστοιχα, από τον κόμβο (1,0) μπορούμε να μεταβούμε στους κόμβους (2,1) και (2,0). Αν βρεθούμε στον κόμβο (2,1) σημαίνει πως βρισκόμαστε δύο βήματα μακρυά από τον κόμβο (0,0) και ότι η τιμή της μετοχής έχει ανέβει έχει ανέβει μία φορά και έχει πέσει άλλη μία για να φτάσει στον κόμβο αυτό. Αν βρεθούμε στον κόμβο (2,0) σημαίνει πως βρισκόμαστε δύο βήματα μακρυά από τον κόμβο (0,0) και ότι η τιμή της μετοχής έχει πέσει δύο φορές για να φτάσει στον κόμβο αυτό [από το (0,0) στο (1,0) και μετά στο (2,0)].

Έστω ότι έχουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς, γραμμένο πάνω σε μία μετοχή. Το δικαίωμα αυτό δεν μπορεί να εξασκηθεί πριν το χρόνο λήξης $t = T$, μένει να δούμε πώς θα γίνει ο υπολογισμός της τιμής του δικαιώματος την χρονική στιγμή $t = 0$, δηλαδή της τιμής C_0. Για N χρονικές περιόδους ακολουθούμε τα εξής βήματα:

B1. Αρχίζοντας με την τιμή υποκείμενης της μετοχής S_0 και τις παραμέτρους u και d, υπολογίζουμε τις τιμές της μετοχής στο χρόνο λήξης, όπου N ο χρόνος λήξης και j οι ανοδικές κινήσεις, με τον εξής τρόπο (βλ. Hull [8]):

$$S_{N,j} = S_0 u^j d^{N-j} \tag{2.8}$$

B2. Έπειτα υπολογίζουμε την αξία του δικαιώματος στο χρόνο λήξης με τον εξής τρόπο:

$$C_{N,j} = max(S_{N,j} - K, 0) = max(S_0 u^j d^{N-j} - K, 0)$$

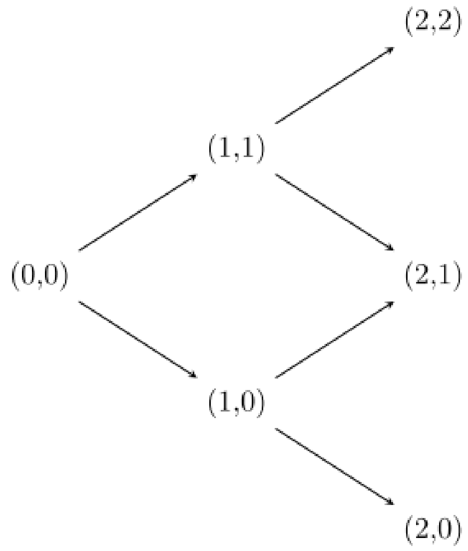
B3. Τέλος, προχωρώντας οπισθοδρομικά ώστε να φθάσουμε στην αρχή του δένδρου, δουλεύοντας τοπικά με δένδρα μιας περιόδου, υπολογίζουμε την αξία του δικαιώματος σε κάθε κόμβο, ως εξής:

$$C_{i,j} = e^{-r\delta t}(P_u C_{i+1,j+1} + P_d C_{i+1,j}), \tag{2.9}$$

μέχρι να οδηγηθούμε στο $C_{0,0}$, το οποίο αποτελεί τη ζητούμενη τιμή, δηλαδή την τιμή του δικαιώματος σήμερα.

Στην περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης πώλησης, θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία, με τη διαφορά πως η αξία του δικαιώματος στο χρόνο λήξης υπολογίζεται ως:

$$C_{N,j} = max(K - S_0 u^j d^{N-j}, 0).$$



Σχήμα 2.4: Κόμβοι διωνυμικού μοντέλου δύο περιόδων

Παράδειγμα 1. Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης αγοράς, γραμμένο πάνω σε μία μετοχή με τα εξής χαρακτηριστικά:

S_0	K	T	N	r	σ
50	50	1	1	0.1	0.4

Όπου, S_0 η τιμή της μετοχής, K η τιμή εξάσκησης της μετοχής, T ο χρόνος εως τη λήξη, N οι περίοδοι εώς τη λήξη, r το επιτόκιο (ετήσιο) και σ η μεταβλητότητα. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε $\delta t = T/N = 1$, ενώ οι παράμετροι του μοντέλου θα είναι $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} = e^{0.4\sqrt{1}} = 1.4918$ και $d = e^{-\sigma\sqrt{dt}} = e^{-0.4\sqrt{1}} = 0.6703$. Η πιθανότητα ανοδικής κίνησης θα είναι $P_u = \frac{e^{r\delta t}-d}{u-d} = \frac{1.1051-0.6703}{1.4918-0.6703} = 0.5293$, ενώ της καθοδικής $P_d = 1 - P_u = 0.4707$. Το $e^{-rdt} = 0.9048$ είναι ο συντελεστής προεξόφλησης. Αρχίζοντας με την τιμή υποκείμενης της μετοχής $S_0 = 50$, υπολογίζουμε τις τιμές των μετοχών στο χρόνο λήξης με τον εξής τρόπο:

$$S_{1,0} = S_0 u^0 d^1 = 50 \cdot 0.6703 = 33.5160,$$

όπου $S_0 d$ η τιμή της μετοχής σε περίπτωση καθόδου και

$$S_{1,1} = S_0 u^1 d^0 = 50 \cdot 1.4918 = 74.5912$$

όπου $S_0 u$, η τιμή της μετοχής σε περίπτωση ανόδου. Έπειτα θα υπολογίσουμε την αξία του δικαιώματος στο χρόνο λήξης με τον εξής τρόπο:

$$C_{1,0} = max(S_0 d - K, 0) = max(33.5160 - 50, 0) = 0,$$

η αξία του δικαιώματος σε περίπτωση καθόδου και

$$C_{1,1} = max(S_t u - K, 0) = max(74.5912 - 50, 0) = 24.5912,$$

η αξία του δικαιώματος σε περίπτωση ανόδου.

Στην συνέχεια, προχωρώντας αναδρομικά, βάσει της σχέσης 2.7 καταλήγουμε ότι:

$$C_{0,0} = 0.9048 \cdot (24.5912 \cdot 0.5293 + 0 \cdot 0.4707) = 11.7783,$$

που αποτελεί και τη ζητούμενη τιμή, δηλαδή η τιμή του δικαιώματος σήμερα.

Παράδειγμα 2. Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης αγοράς, γραμμένο πάνω σε μία μετοχή με τα εξής χαρακτηριστικά:

S_0	K	T	N	r	σ
50	50	1	2	0.1	0.4

Όπου, S_0 η τιμή της μετοχής, K η τιμή εξάσκησης της μετοχής, T ο χρόνος έως τη λήξη, N οι περίοδοι έως τη λήξη, r το επιτόκιο (ετήσιο) και σ η μεταβλητότητα. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε $\delta t = T/N = 0.5$, ενώ οι παράμετροι του μοντέλου θα είναι $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} = e^{0.4\sqrt{0.5}} = 1.3269$ και $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} = e^{-0.4\sqrt{0.5}} = 0.7536$. Η πιθανότητα ανοδικής κίνησης θα είναι $P_u = \frac{e^{r\delta t}-d}{u-d} = \frac{1.1052-0.7536}{1.3269-0.7536} = 0.5192$, ενώ της καθοδικής $P_d = 1 - P_u = 0.4808$. Το $e^{-r\delta t} = 0.9512$ είναι ο συντελεστής προεξόφλησης. Αρχίζοντας με την τιμή υποκείμενης της μετοχής $S_0 = 50$, υπολογίζουμε τις τιμές των μετοχών στο χρόνο λήξης σύμφωνα με την Εξίσωση 2.8:

$$\begin{aligned} S_{2,0} &= 50 \cdot 1.3269^0 \cdot 0.7536^2 = 28.3955 \\ S_{2,1} &= 50 \cdot 1.3269^1 \cdot 0.7536^1 = 50 \\ S_{2,2} &= 50 \cdot 1.3269^2 \cdot 0.7536^0 = 88.0334. \end{aligned}$$

Έπειτα θα υπολογίσουμε την αξία του δικαιώματος στο χρόνο λήξης:

$$\begin{aligned} C_{2,0} &= max(28.3955 - 50, 0) = 0 \\ C_{2,1} &= max(50 - 50, 0) = 0 \\ C_{2,2} &= max(88.0334 - 50, 0) = 38.0334. \end{aligned}$$

Τέλος, προχωρώντας αναδρομικά, βάσει της σχέσης 2.9, υπολογίζουμε την τιμή του δικαιώματος στους κόμβους (1,1) και (1,0):

$$\begin{aligned} C_{1,0} &= 0.9048 \cdot (0.5192 \cdot 38.0334 + 0.4808 \cdot 0) = 18.783 \\ C_{1,1} &= 0.9048 \cdot (0.5192 \cdot 0 + 0.4808 \cdot 0) = 0, \end{aligned}$$

και τελικά ότι:

$$C_{0,0} = 0.9048 \cdot (0.5192 \cdot 18.783 + 0.4808 \cdot 0) = 9.2766$$

που αποτελεί και η ζητούμενη τιμή, δηλαδή η τιμή του δικαιώματος σήμερα.

Είναι προφανές πως στην περίπτωση πολλών περιόδων η παραπάνω διαδικασία γίνεται με τη βοήθεια κάποιου προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή, μιας και το πλήθος των πράξεων που θα χρειαστούν γίνεται πολύ μεγάλο.

Παρατήρηση 2. Μέχρι στιγμής είδαμε το διωνυμικό δένδρο τιμολόγησης Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης (αγοράς και πώλησης). Ωστόσο, η ισχύς του διωνυμικού μοντέλου φαίνεται ιδίως στην ικανότητά του να τιμολογεί Αμερικάνικα δικαιώματα, κάτι που αποτελεί μέχρι σήμερα ένα πρόβλημα ιδιαίτερα απαιτητικό λόγω της σύνθετης - πολύπλοκης δομής των δικαιωμάτων αυτού του τύπου μιας και επιτρέπουν την εξάσκηση οποτεδήποτε μέχρι και το χρόνο λήξης. Η ιδέα πίσω από την τιμολόγηση του δικαιώματος αυτού με το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης, είναι απλή: Εξετάζουμε σε κάθε κόμβο (i, j) του δένδρου, αν μας συμφέρει να εξασκήσουμε το δικαίωμα ή να το κρατήσουμε και να συνεχίσουμε προς τα πίσω τη διαδικασία. Η διαδικασία έχει ως εξής:

- Αν εξασκηθεί το δικαίωμα, η αξία του (απόδοση) είναι ίση με το μέγιστο μεταξύ του μηδενός και της ποσότητας $S_{i,j} - K$, δηλαδή $max(0, S_{i,j} - K)$.
- Αν δεν εξασκηθεί το δικαίωμα, τότε η αξία του υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο που υπολογίζουμε και τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης.

Για να εξετάσουμε αν μας συμφέρει ή όχι η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος στον κόμβο (i, j), συγκρίνουμε τις δύο παραπάνω τιμές. Αν η πρώτη τιμή $max(0, S_{i,j} - K)$ υπερτερεί της δεύτερης $e^{-r\delta t}(P_u C_{i+1,j+1} + P_d C_{i+1,j})$, μας συμφέρει η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος (μιας και στον κόμβο αυτό η εξάσκηση δημιουργεί μεγαλύτερη αξία). Αντίθετα, αν η δεύτερη τιμή υπερτερεί της πρώτης, τότε η πρόωρη εξάσκηση δεν μας συμφέρει (το δικαίωμα δεν συμφέρει να εξασκηθεί πρόωρα σε αυτόν τον κόμβο). Ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς δεν συμφέρει ποτέ να εξασκηθεί πριν την λήξη, άρα η αξία του θα είναι ίδια με αυτή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Συνοπτικά ωστόσο, η αξία του Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς στον κόμβο (i, j) δίνεται για Αμερικανικά δικαιώματα αγοράς από την σχέση:

$$C_{i,j} = max\left[e^{-r\delta t}(P_u C_{i+1,j+1} + P_d C_{i+1,j}), max(0, S_{i,j} - K)\right],$$

ενώ για για Αμερικανικά δικαιώματα πώλησης δίνεται από την σχέση:

$$C_{i,j} = max\left[e^{-r\delta t}(P_u C_{i+1,j+1} + P_d C_{i+1,j}), max(0, K - S_{i,j})\right].$$

2.4 Η αναλυτική μέθοδος

Στο σημείο αυτό, προκύπτει το ερώτημα αν μπορούμε να βρούμε κάποιον τύπο σε κλειστή μορφή για τον υπολογισμό της τιμής του δικαιώματος σύμφωνα με το διωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης. Κάτι τέτοιο θα ήταν πολύ βολικό, καθώς δεν θα χρειαζόταν να κάνουμε όλη την παραπάνω αλγοριθμική διαδικασία, η οποία πρέπει να πούμε ότι για ένα μεγάλο πλήθος χρονικών περιόδων είναι αρκετά επίπονη υπολογιστικά και απαιτεί ισχυρό υπολογιστή. Έστω ότι έχουμε ένα δένδρο N περιόδων (χρονικών βημάτων). Σύμφωνα με την αλγοριθμική προσέγγιση που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, το δένδρο αποτελείται από πολλούς κόμβους. Από κάθε τέτοιο κόμβο δύο είναι οι πιθανές εκβάσεις της υποκείμενης μετοχής, μία ανοδική με παράμετρο ανοδικής κίνησης u και πιθανότητα P_u και μία καθοδική, με παράμετρο καθοδικής κίνησης d και πιθανότητα P_d. Για κάθε μία από τις τιμές αυτές, υπάρχουν $\binom{N}{j} = \frac{N!}{j!(N-j)!}$ συνδυασμοί - διαφορετικοί τρόποι για να οδηγηθούμε εκεί. Πιο αναλυτικά, στο διωνυμικό δέντρο τριών περιόδων (βλ. Σχήμα 2.7), για να οδηγηθούμε στο C_8, το οποίο βρίσκεται στην τρίτη περίοδο του δέντρου και για το οποίο έχουν γίνει δύο ανοδικές κινήσεις, υπάρχουν $\binom{3}{2} = 3$ διαφορετικοί τρόποι για να οδηγηθούμε εκεί. Ο πρώτος είναι C_0,C_2,C_5,C_8, ο δεύτερος είναι C_0,C_1,C_4,C_8 και ο τρίτος έιναι C_0,C_2,C_4,C_8. Για να οδηγηθούμε στο C_4, το οποίο βρίσκεται στην δεύτερη περίοδο του δέντρου και για το οποίο έχει γίνει μία ανοδική κίνηση, υπάρχουν επομένως $\binom{2}{1} = 2$ διαφορετικοί τρόποι για να οδηγηθούμε εκεί. Ο πρώτος είναι C_0,C_2,C_4 και ο δεύτερος είναι C_0,C_1,C_4.

Ουσιαστικά παρατηρούμε πως σε κάθε χρονική στιγμή εκτελούμε ένα πείραμα τύχης (άνοδος ή πτώση της τιμής της μετοχής). Αν θεωρήσουμε ως επιτυχία την άνοδο της τιμής της μετοχής και ως αποτυχία την πτώση της, τότε μετά από N χρονικά βήματα (N διαφορετικά και μεταξύ τους ανεξάρτητα πειράματα Bernoulli), η μετοχή θα έχει κάνει συνολικά j ανοδικές κινήσεις, όπου $j \sim Bin(N, P_u)$. Επομένως, η αναμενόμενη τιμή της απόδοσης του δικαιώματος στη λήξη είναι:

$$E[P] = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} P_u^j (1 - P_u)^{N-j} P[j],$$

όπου με $P[j]$ συμβολίζουμε την απόδοση του δικαιώματος στη λήξη και για την περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς είναι ίση με $max(S_0 u^j d^{N-j} - K, 0)$. Όπως έχουμε ήδη πει, η τιμή του δικαιώματος μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η παραπάνω μέση τιμή αλλά προεξοφλημένη και μάλιστα κάτω από τις τεχνητές πιθανότητες P_u και P_d, ως εξής:

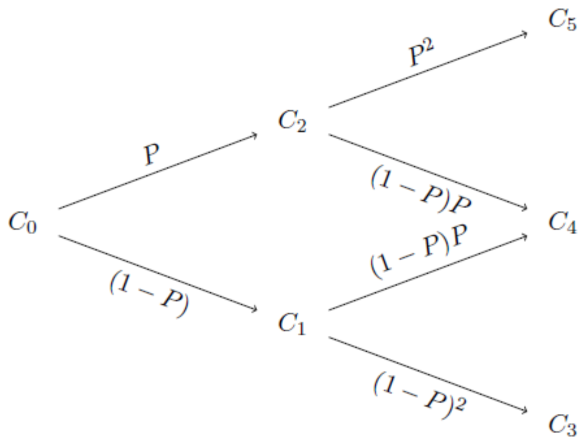
$$C_0 = e^{-rT}\left[\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}P_u^j(1-P_u)^{N-j}P[j]\right]. \tag{2.10}$$

Παρατήρηση 3. Στο σημείο αυτό προκύπτει μία πολύ ενδιαφέρουσα παρατήρηση, καθώς κάποιος θα μπορούσε να φανταστεί μία αντιστοιχία μεταξύ του διωνυμικού δένδρου τιμολόγησης και του τριγώνου Pascal. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι στο διωνυμικό δένδρου μιας περιόδου υπάρχουν δύο πιθανές τελικές τιμές, στο διωνυμικό δένδρο δύο περιόδων υπάρχουν τρεις πιθανές τελικές τιμές, στο δένδρο των τριών περιόδων υπάρχουν τέσσερις πιθανές τελικές τιμές, στο δένδρο των τεσσάρων περιόδων υπάρχουν πέντε πιθανές τελικές τιμές, ενώ στο δένδρο των πέντε περιόδων, υπάρχουν έξι πιθανές τελικές τιμές. Καταλήγουμε λοιπόν ότι στο διωνυμικό δένδρο N περιόδων υπάρχουν δηλαδή $N+1$ πιθανές τελικές τιμές. Ο αριθμός των δυνατων διαδρομών (τρόπων), με τους οποίους πάμε σε κάθε μία από τις τιμές του δένδρου (δηλαδή σε κάθε κόμβο του διωνυμικού δένδρου), δίνεται από το τρίγωνο του Pascal (βλ.Worral [29]). Το τρίγωνο Pascal φαίνεται στο σχήμα 2.5 για $N = 5$ περιόδους.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Σχήμα 2.5: Τρίγωνο Pascal

Το τρίγωνο Pascal δεν είναι τίποτα άλλο παρά μία τριγωνική διάταξη των διωνυμικών συντελεστών, οι οποίοι όπως είπαμε παραπάνω μας δίνουν τον αριθμό των συνολικών διαδρομών που πάμε σε κάθε κόμβο. Έτσι λοιπόν, γίνεται ξεκάθαρη η αντιστοιχία μεταξύ της μαθηματικής αυτής δομής και του διωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης. Το $n = 0$, αντιστοιχεί στην αρχή του δένδρου. Το $n = 1$ αντιστοιχεί στην πρώτη χρονική στιγμή του δένδρου κατά την οποία έχουμε δύο πιθανές τελικές τιμές. Το $n = 2$ αντιστοιχεί στην δεύτερη χρονική στιγμή του δένδρου κατά την οποία έχουμε τρεις πιθανές τελικές τιμές κ.ο.κ. Από το Σχήμα 2.5 παρατηρούμε ότι στην δεύτερη περίοδο υπάρχει ένας τρόπος να φτάσουμε στις δύο εξωτερικές πλευρές του τριγώνου (οι οποίες αντιστοιχούν τους κόμβους (2,2) και (2,0) στο δένδρο του Σχήματος 2.4) και δύο τρόποι για να οδηγηθούμε στον μεσαίο κόμβο (2,1): είτε πηγαίνοντας πρώτα πάνω (δεξιά) και ύστερα φθάνοντας εκεί, είτε πρώτα κάτω (αριστερά) και ύστερα εκεί. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των δυνατών διαδρομών που μας πάνε στον κάθε κόμβο πολύ άμεσα. Μάλιστα, οι αριθμοί στο τρίγωνο του Pascal είναι πολύ εύκολο να υπολογιστούν, αρκεί να προσθέσουμε (όπως φαίνεται και από το παραπάνω ενδεικτικό τρίγωνο του Pascal) τους δύο αριθμούς που βρίσκονται από πάνω (εξαιρούνται οι εξωτερικές πλευρές του τριγώνου που έχουν πάντα μονάδα) και έτσι θα προκύψει ο αριθμός από κάτω. Για παράδειγμα, ο αριθμός 4, στην τέταρτη περίοδο του τριγώνου, προκύπτει ως άθροισμα των δύο πάνω αριθμών $(3 + 1)$, της τρίτης περίδου του τριγώνου.



Σχήμα 2.6: Διωνυμικό δέντρο δύο περιόδων

Παράδειγμα 3. Έστω ένα δένδρο $N=2$ περιόδων. Σύμφωνα με την Σχέση 2.10 έχουμε:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= e^{-rT}\left[\sum_{j=0}^{N=2}\binom{2}{j}P_u^j(1-P_u)^{2-j}max(S_0u^jd^{2-j}-K,0)\right] \\
&= e^{-rT}\left[\binom{2}{0}P_u^0(1-P_u)^{2-0}max(S_0u^0d^{2-0}-K,0)\right. \\
&\quad+\binom{2}{1}2P_u^1(1-P_u)^{2-1}max(S_0u^1d^{2-1}-K,0) \\
&\quad\left.+\binom{2}{2}P_u^2(1-P_u)^{2-2}max(S_0u^2d^{2-2}-K,0)\right] \\
&= e^{-rT}[(1-P_u)^2-max(S_0d^2-K,0)+2P_u(1-P_u)max(S_0-K,0) \\
&\quad+P_u^2max(S_0u^2-K,0)] \\
&= e^{-rT}\left[P_u^2C_5+2P_u(1-P_u)C_4+(1-P_u)^2C_3\right],
\end{aligned}
$$

όπου C_0 η τιμή του δικαιώματος σήμερα. Θα δείξουμε τώρα με την αλγοριθμική προσέγγιση της Παραγράφου 2.3 πως η τιμή του δικαιώματος για $N=2$, δίνεται από τον παραπάνω τύπο (δεν βάζουμε προεξόφληση για ευκολία). Αρχικά έχουμε:

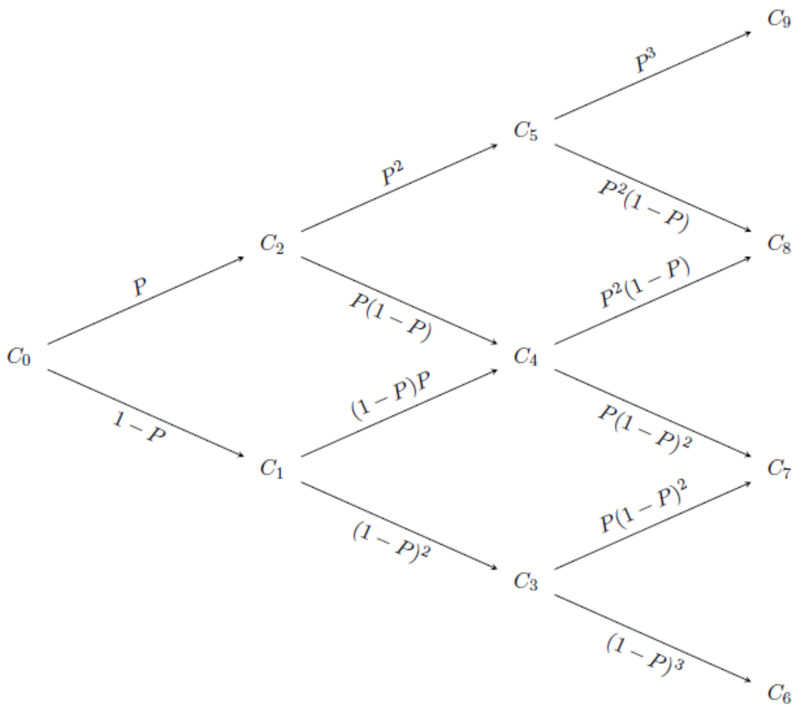
$$
\begin{aligned}
C_2 &= P_uC_5+(1-P_u)C_4 \\
C_1 &= P_uC_4+(1-P_u)C_3.
\end{aligned}
$$

Κατόπιν, σύμφωνα με όσα έχουμε πει προχωράμε προς τα πίσω:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= P_uC_2+(1-P_u)C_1 \\
&= P_u\left[P_uC_5+(1-P_u)C_4\right]+(1-P_u)\left[P_uC_4+(1-P_u)C_3\right] \\
&= P_u^2C_5+P_u(1-P_u)C_4+(1-P_u)P_uC_4+(1-P_u)(1-P_u)C_3 \\
&= P_u^2C_5+2P_u(1-P_u)C_4+(1-P_u)^2C_3.
\end{aligned}
$$

Η παραπάνω σχέση πολλαπλασιασμένη με το προεξοφλητικό επιτόκιο, μας δίνει την τιμή του δικαιώματος στον χρόνο $t=0$, που είναι η ίδια σχέση που πήραμε παραπάνω με τον αναλυτικό τύπο.

Για να οδηγηθούμε στο C_3, το οποίο βρίσκεται στην δεύτερη περίοδο του δέντρου και για το οποίο δεν έχει γίνει κάποια ανοδική κίνηση, υπάρχει $\binom{2}{0} = 1$ τρόπος για να οδηγηθούμε εκεί. Αυτός είναι C_0,C_1,C_3. Για να οδηγηθούμε στο C_4, το οποίο βρίσκεται στην δεύτερη περίοδο του δέντρου και για το οποίο έχει γίνει μία ανοδική κίνηση, υπάρχουν $\binom{2}{1} = 2$ διαφορετικοί τρόποι για να οδηγηθούμε εκεί. Ο πρώτος είναι C_0,C_2,C_4 και ο δεύτερος είναι C_0,C_1,C_4. Για να οδηγηθούμε στο C_5, το οποίο βρίσκεται στην δεύτερη περίοδο του δέντρου και για το οποίο έχουν γίνει δύο ανοδικές κινήσεις, υπάρχει $\binom{2}{2} = 1$ τρόπος για να οδηγηθούμε εκεί, η διαδρομή C_0,C_2,C_5. Αυτά φαίνονται και από το τρίγωνο του Pascal στο Σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.7: Διωνυμικό δέντρο τριών περιόδων

Παράδειγμα 4. Έστω τώρα πως έχουμε ένα δένδρο $N = 3$ περιόδων. Σύμφωνα με την Σχέση 2.10, η τιμή του δικαιώματος υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-rT}\left[\sum_{j=0}^{N=3}\binom{3}{j}P_u^j(1-P_u)^{3-j}max(S_0u^jd^{3-j}-K,0)\right] \\ &= e^{-rT}\left[P_u^3C_9 + 3P_u^2(1-P_u)C_8 + 3P_u(1-P_u)^2C_7 + (1-P_u)^3C_6\right]. \end{aligned}$$

Θα δείξουμε τώρα με την αλγοριθμική προσέγγιση της Παραγράφου 2.3 πως η τιμή του δικαιώματος για $N = 3$, δίνεται από τον παραπάνω τύπο (δεν βάζουμε προεξόφληση για ευκολία). Αρχικά, μπορούμε να υπολογίσουμε τις αποδόσεις του δικαιώματος στους κόμβους C_6, C_7, C_8 και C_9 όπως έχουμε περιγράψει προηγουμένως. Κατόπιν, προχωράμε προς τα πίσω, δουλεύοντας τοπικά με δένδρα μιας περιόδου:

$$\begin{aligned} C_5 &= P_uC_9 + (1-P_u)C_8 \\ C_4 &= P_uC_8 + (1-P_u)C_7 \\ C_3 &= P_uC_7 + (1-P_u)C_6 \end{aligned}$$

Έπειτα:

$$\begin{aligned}
C_2 &= P_u C_5 + (1-P_u)C_4 \\
&= P_u\left[PC_9 + (1-P_u)C_8\right] + (1-P_u)\left[P_u C_8 + (1-P_u)C_7\right] \\
&= P_u^2 C_9 + P_u(1-P_u)C_8 + (1-P_u)P_u C_8 + (1-P_u)^2 C_7 \\
C_1 &= P_u C_4 + (1-P_u)C_3 \\
&= P_u\left[P_u C_8 + (1-P_u)C_7\right] + (1-P_u)\left[P_u C_7 + (1-P_u)C_6\right] \\
&= P_u^2 C_8 + P_u(1-P_u)C_7 + (1-P_u)P_u C_7 + (1-P_u)^2 C_6
\end{aligned}$$

Τελικά:

$$\begin{aligned}
C_0 &= P_u C_2 + (1-P_u)C_1 \\
&= P_u\left[P_u^2 C_9 + P_u(1-P_u)C_8 + (1-P_u)PC_8 + (1-P_u)^2 C_7\right] \\
&+ (1-P_u)\left[P_u^2 C_8 + P_u(1-P_u)C_7 + (1-P_u)P_u C_7 + (1-P_u)^2 C_6\right] \\
&= P_u^3 C_9 + P_u^2(1-P_u)C_8 + P_u^2(1-P_u)C_8 + P_u(1-P_u)^2 C_7 \\
&+ (1-P_u)P_u^2 C_8 + P_u(1-P_u)^2 C_7 + (1-P_u)^2 P_u C_7 + (1-P_u)^3 C_6 \\
&= P_u^3 C_9 + 3P_u^2(1-P_u)C_8 + 3P_u(1-P_u)^2 C_7 + (1-P_u)^3 C_6
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω τιμές, πολλαπλασιασμένες με το προεξοφλητικό επιτόκιο, μας δίνουν την τιμή του δικαιώματος στον χρόνο $t = 0$. Για να οδηγηθούμε στο C_6, το οποίο βρίσκεται στην τρίτη περίοδο του δέντρου και για το οποίο δεν έχει γίνει κάποια ανοδική κίνηση, υπάρχει $\binom{3}{0} = 1$ τρόπος για να οδηγηθούμε εκεί. Αυτός είναι ο C_0,C_1,C_3,C_6. Για να οδηγηθούμε στο C_7, το οποίο βρίσκεται στην τρίτη περίοδο του δέντρου και για το οποίο έχει γίνει μία ανοδική κίνηση, δηλαδή υπάρχουν $\binom{3}{1} = 3$ διαφορετικοί τρόποι για να οδηγηθούμε εκεί. Ο πρώτος είναι C_0,C_2,C_4,C_7, ο δεύτερος είναι C_0,C_1,C_4,C_7 και ο τρίτος είναι C_0,C_1,C_3,C_7. Για να οδηγηθούμε στο C_8, το οποίο βρίσκεται στην τρίτη περίοδο του δέντρου και για το οποίο έχουν γίνει δύο ανοδικές κινήσεις, δηλαδή υπάρχουν $\binom{3}{2} = 3$ διαφορετικοί τρόποι για να οδηγηθούμε εκεί. Ο πρώτος είναι C_0,C_2,C_5,C_8, ο δεύτερος είναι C_0,C_1,C_4,C_8 και ο τρίτος είναι C_0,C_2,C_4,C_8. Για να οδηγηθούμε στο C_9, το οποίο βρίσκεται στην τρίτη περίοδο του δέντρου και για το οποίο έχουν γίνει τρεις ανοδικές κινήσεις, υπάρχει $\binom{3}{3} = 1$ τρόπος για να οδηγηθούμε εκεί, ο C_0,C_2,C_5,C_9. Αυτά φαίνονται και από το Σχήμα 2.5.

Παράδειγμα 5. Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης αγοράς, γραμμένο πάνω σε μία μετοχή με τα εξής χαρακτηριστικά:

S_0	K	T	N	r	σ
50	50	1	2	0.1	0.4

Όπου, S_0 η τιμή της μετοχής, K η τιμή εξάσκησης της μετοχής, T ο χρόνος έως τη λήξη, N οι περίοδοι έως τη λήξη, r το επιτόκιο (ετήσιο) και σ η μεταβλητότητα. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε $\delta t = T/N = 0.5$, ενώ οι παράμετροι του μοντέλου θα είναι $u = e^{\sigma\sqrt{dt}} = e^{0.4\sqrt{0.5}} = 1.3269$ και $d = e^{-\sigma\sqrt{dt}} = e^{-0.4\sqrt{0.5}} = 0.7536$. Η πιθανότητα ανοδικής κίνησης θα είναι $P_u = \frac{e^{rdt}-d}{u-d} = \frac{1.0512-0.7536}{1.3269-0.7536} = 0.5191$, ενώ της καθοδικής $P_d = 1 - P_u = 0.4808$. $e^{-rT} = 0.9048$ είναι ο συντελεστής προεξόφλησης.

Εφαρμόζοντας τον τύπο 2.10, η αξία του δικαιώματος σήμερα υπολογίζεται ως εξής:

$$C_0 = e^{-rT}\left[\sum_{j=0}^{N=2}\binom{2}{j}P_u^j(1-P_u)^{2-j}max(S_0u^jd^{2-j} - K, 0)\right]$$

Αναλυτικά το άθροισμα αυτό είναι:

$$
\begin{aligned}
C_0 = e^{-rT}\Bigg[&\binom{2}{0}(1-P_u)^2 max(S_0 d^2 - K, 0) + \binom{2}{1}P_u(1-P_u)max(S_0 - K, 0) \\
&+ \binom{2}{2}P_u^2 max(S_0 u^2 - K, 0)\Bigg] \\
= 0.9048\Big[&\,[2!/(0!\cdot(2-0)!)]\cdot 0.4808^2 \cdot (0) \\
&+ [2!/(1!\cdot(2-1)!)]\cdot 0.5192^1 \cdot 0.4808^1 \cdot (0) \\
&+ [2!/(2!\cdot(2-2)!)]\cdot 0.5192^2 \cdot 0.4808^0 \cdot (38.0334)\Big] = 9.2766
\end{aligned}
$$

Στην τιμή αυτή φτάσαμε και στο παράδειγμα 2, στο οποίο δουλέψαμε με τον αλγοριθμικό τρόπο.

Παρατήρηση 4. *Στην περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης πώλησης χρησιμοποιούμε πάλι την Εξίσωση 2.10 μόνο που θα αλλάξει η συνάρτηση απόδοσης του δικαιώματος, ως*

$$max(K - S_0 u^j d^{N-j}, 0).$$

2.5 Παράρτημα

Στο παράρτημα αυτό θα κάνουμε την βαθμονόμηση του διωνυμικού υποδείγματος. Δηλαδή, σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους u, d οι οποίες αποτελούν βασικά συστατικά του διωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης. Για να γίνει αυτό πρέπει πρώτα να κάνουμε μία σύντομη εισαγωγή σε δύο πολύ σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες, την κίνηση Brown, και τη γεωμετρική κίνηση Brown. Για περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με τις στοχαστικές διαδικασίες και τα στοχαστικά μαθηματικά γενικότερα, βλ. Γιαννακόπουλο [2], Μπαλτά [5] και Brzezniak & Zastawniak [17].

2.5.1 Η κίνηση Brown

Η κίνηση Brown ή αλλιώς διαδικασία Wiener, όπως είναι γνωστή, αποτελεί μία από τις σημαντικότερες στοχαστικές διαδικασίες, με τεράστια σημασία, τόσο από θεωρητική μεριά όσο και από πλευράς εφαρμογών. Σημαντικός είναι ο ρόλος της στο πεδίο της Στοχαστικής Ανάλυσης (Λογισμός Itô) αλλά και της Στοχαστικής Χρηματοοικονομικής. Ουσιαστικά πρόκειται για έναν απλό συμμετρικό τυχαίο περίπατο, κατάλληλα τροποποιημένο ως προς το χωρικό και το χρονικό του βήμα. Ο λόγος που μας απασχολεί η κίνηση Brown είναι το γεγονός πως αποτελεί τον πυρήνα για τα μοντέλα της Χρηματοοικονομικής σε συνεχή χρόνο. Τα θεμέλια έβαλε πρώτος ο Άγγλος βοτανολόγος Robert Brown, ο οποίος παρατήρησε την κίνηση σωματιδίων μέσα σε υγρό κάτω από το μικροσκόπιο, το 1827. Αργότερα, το 1904 ο Einstein [20] εξήγησε το φαινόμενο αυτό που παρατήρησε ο Brown και είπε ότι αυτό πρακτικά οφείλεται στον βομβαρδισμό που δέχονται τα σωματίδια από τα μόρια της επιφάνειας του νερού. Το 1900, Ο Γάλλος μαθηματικός Luis Bachelier χρησιμοποίησε για πρώτη φορά την κίνηση Brown ως μοντέλο για τις τιμές των μετοχών. Έπειτα, το 1923, ο σπουδαίος Αμερικανός μαθηματικός Norbert Wiener, θεμελιώνει με μαθηματικό τρόπο την κίνηση Brown, αποδεικνύοντας την ύπαρξη μίας και μοναδικής διαδικασίας με τα χαρακτηριστικά αυτά. †

Ορισμός 1. *Η κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία $(W_t, t \geq 0)$, η οποία παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

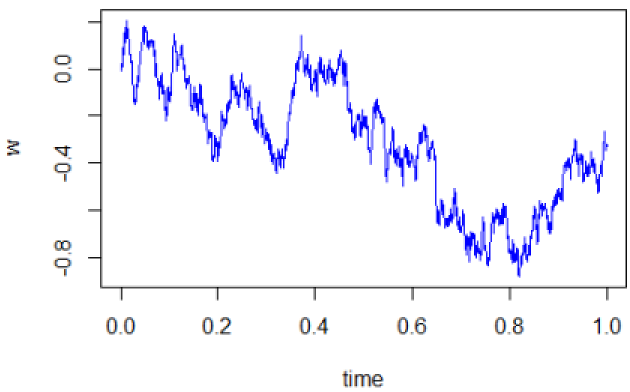
† Μία στοχαστική διαδικασία αποτελεί μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών παραμετρισμένων με τον χρόνο.

1. $W_0 = 0$.

2. *Για* $0 \leq s < t \leq T$, *η τυχαία μεταβλητή* $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$.

3. *Για* $0 \leq s < t < u < v \leq T$ *οι προσαυξησεις* $W_t - W_s$ *και* $W_v - W_u$ *είναι ανεξάρτητες (ανεξάρτητες μεταβολές).*

4. *Οι τροχιές της είναι συνεχείς με πιθανότητα 1.*



Σχήμα 2.8: Προσομοίωση μονοπατιού της κίνησης Brown στο $[0, 1]$. Πηγή: Μπαλτάς [5].

2.5.2 Η γεωμετρική κίνηση Brown

Ο Γάλλος μαθηματικός Louis Bachelier στη διδακτορική του διατριβή το 1900 με τίτλο 'Theorie de la Speculation' ήταν ο πρώτος που συσχέτισε την εξέλιξη των τιμών μιας μετοχής και γενικότερα ενός αξιογράφου, με την κίνηση Brown, εισάγοντας έτσι την αβεβαιότητα, σε σχέση με την εξέλιξη των τιμών των μετοχών. Θεωρούμε τώρα μια μετοχή της οποίας η τιμή την χρονική στιγμή $t \in [0, T]$, με $T > 0$ (συμβολίζεται με S_t). Ο Bachelier ουσιαστικά υπέθεσε πως οι μεταβολές των τιμών μιας μετοχής σε ένα πολύ μικρό διάστημα μήκους dt (δηλαδή τη συμβολίζουμε με dS_t), είναι ανάλογες των προσαυξήσεων μιας κίνησης Brown, δηλαδή:

$$dS_t = \sigma dW_t,$$

όπου το $\sigma > 0$ αποτελεί την μεταβλητότητα των τιμών της μετοχής, όπως έχει αναφερθεί. Η ιδέα αυτή του Bachelier, δεν είναι ο μοναδικός αλλά ούτε και ο σωστός τρόπος για να περιγράψουμε την εξέλιξη των τιμών μιας μετοχής στο συνεχή χρόνο, ήταν όμως προχωρημένη για την εποχή της και ουσιαστικά ήταν αυτή που έδωσε το έναυσμα και αποτέλεσε την βάση για ένα πολύ σημαντικό μοντέλο των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, αυτό της γεωμετρικής κίνησης. Γιατί όμως η κίνηση Brown δεν είναι ένας κατάλληλος τρόπος για να περιγράψουμε την εξέλιξη των τιμών μιας μετοχής; Καταρχάς, παρατηρούμε ότι το υπόδειγμα της κίνησης Brown μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή

$$S_t = S_0 + \sigma W_t,$$

για κάθε χρονική στιγμή $t \in [0, T]$. Επομένως:

- Υπάρχει το βασικό πρόβλημα πως η κίνηση Brown μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές (βλ. Σχήμα 2.8), κάτι τέτοιο δεν είναι φυσικά αποδεκτό για ένα μοντέλο που περιγράφει την εξέλιξη των τιμών μιας μετοχής.

- Οι μεταβολές της τιμής της μετοχής είναι ανεξάρτητες από την ίδια την τιμή, κάτι που δεν φαίνεται ρεαλιστικό.

Ο οικονομολόγος Paul Samuelson, το 1960, μελετώντας την διδακτορική διατριβή του Bachelier έκανε την παρατήρηση πως συνήθως οι επενδυτές ενδιαφέρονται περισσότερο για τις αποδόσεις των επενδύσεών τους και όχι για την τιμή των στοιχείων στα οποία έχουν τοποθετηθεί. Δηλαδή, η πρώτη παρατήρηση που έκανε, ήταν πως το μοντέλο της κίνησης Brown θα ήταν πιο ενδιαφέρον στην μορφή:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma dW_t,$$

όπου $\sigma > 0$. Μάλιστα, ο Samuelson προχώρησε ένα βήμα παρακάτω, προτείνοντας το υπόδειγμα:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

με αρχική συνθήκη $S_0 > 0$. Η παραπάνω μορφή μοιάζει με μία συνήθη διαφορική εξίσωση με την διαφορά στο γεγονός πως περιλαμβάνει τυχαιότητα λόγω του όρου $\sigma S_t dW_t$. Η μορφή αυτή λέγεται στοχαστική διαφορική εξίσωση. Η στοχαστικότητα (τυχαιότητα) εδώ, εισάγεται από τις προσαυξήσεις της κίνησης Brown, δηλαδή από τον όρο dW_t. Για να λυθεί η παραπάνω εξίσωση, απαιτούνται ειδικές τεχνικές της Στοχαστικής Ανάλυσης (Λήμμα του Itô). Η εξίσωση αυτή λοιπόν, είναι ένας τρόπος που μας δείχνει πως συνδέεται η μεταβολή της τιμής της μετοχής μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t + dt$ (δηλαδή το dS_t) με την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t (δηλαδή το S_t). Η λύση αυτής της εξίσωσης ουσιαστικά ορίζει την στοχαστική διαδικασία η οποία ονομάζεται γεωμετρική κίνηση Brown. Το μοντέλο αυτο πρακτικά μας λέει, ότι η μεταβολή της τιμής της μετοχής σε ενα χρονικό διάστημα μήκους δt μπορεί να χωριστεί σε δύο κομμάτια:

- Ο πρώτος όρος είναι το $\mu S_t dt$. Πρόκειται για μια μεταβολή η οποία είναι ανάλογη της χρονικής διάρκειας dt, της αναμενόμενης απόδοσης της τιμής της μετοχης μ, καθώς και της τιμής της μετοχής την χρονικη στιγμή t.

- Ο δεύτερος όρος είναι το $\sigma S_t dW_t$, το οποίο μοντελοποιεί τις στατιστικές διακυμάνσεις γύρω από αυτή την παραπάνω μεταβολή.

Είναι γνωστό (βλ. Γιαννακόπουλο [2]) ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι η ακόλουθη στοχαστική διαδικασία:

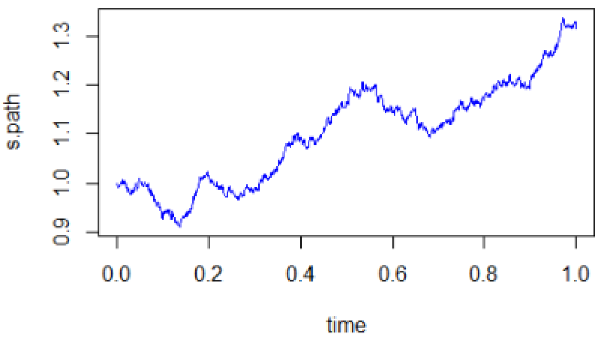
$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right], \tag{2.11}$$

η οποία αποτελεί το γνωστό υπόδειγμα της γεωμετρικής κίνησης Brown. Από εδώ και έπειτα όταν αναφερόμαστε στην γεωμετρική κίνηση Brown (βλ. Σχήμα 2.9), εννοούμε την παραπάνω στοχαστική διαδικασία. Με λίγα λόγια, μια στοχαστική διαδικασία S_t λέμε ότι είναι γεωμετρική κίνηση Brown, αν η $log S_t$ είναι κίνηση Brown με αρχική τιμή $log S_0$. Η γεωμετρική κίνηση Brown είναι στην ουσία μια εκθετική κίνηση Brown.

2.5.3 Βαθμονόμηση του διωνυμικού υποδείγματος

Στην παράγραφο αυτή θα προχωρήσουμε σε βαθμονόμηση του διωνυμικού υποδείγματος (ακολουθώντας την παρουσίαση του Brandimarte [14]), δηλαδή θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους u και d τις οποίες χρησιμοποιήσαμε στην Παράγραφο 2.1 και τώρα θα δούμε αναλυτικά πως προκύπτουν. Η ουσία του διωνυμικού υποδείγματος, είναι πως αποτελεί μία καλή προσέγγιση της παρακάτω στοχαστικής διαδικασίας:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$



Σχήμα 2.9: Προσομοίωση ενός μονοπατιού της γεωμετρικής κίνησης Brown. Πηγή: Μπαλτάς [5].

με αρχική συνθήκη $S_0 > 0$ όπου $(W_t, t \geq 0)$ αποτελεί μία τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown. Η ιδέα είναι να υπολογίσουμε τις παραμέτρους με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρούνται ορισμένες από τις βασικές ιδιότητες του μοντέλου αυτού. Αυτό εννοούμε όταν λέμε βαθμονόμηση. Ξεκινώντας από την τιμή (μετοχή) S_t, μετά από ένα μικρό διάστημα μήκους δt, η νέα τιμή ισούται με $S_1 := S_{t+\delta t}$ έτσι ώστε

$$log(S_1/S_t) \sim N\left((r - 0.5\sigma^2)\delta t, \sigma^2 \delta t\right).$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της λογαριθμικής (lognormal) κατανομής, έχουμε:

$$E[S_1/S_t] = e^{r\delta t} \tag{2.12}$$

και

$$Var[S_1/S_t] = e^{2r\delta t}(e^{\sigma^2 \delta t} - 1) \tag{2.13}$$

Έχουμε δηλαδή δύο εξισώσεις, για να υπολογίσουμε δύο παραμέτρους u και d. Για την διακριτή κατανομή που ακολουθεί το διωνυμικό υπόδειγμα μίας περιόδου, ισχύει πώς:

$$E[S_1] = uP_uS_t + d(1 - P_u)S_t \tag{2.14}$$

και απαιτούμε η μέση τιμή της λογαριθμικής κατανομής 2.12 να ισούται με αυτή της διακριτής 2.14, δηλαδή

$$uP_uS_t + d(1 - P_u)S_t = S_te^{r\delta t}.$$

Επίσης, την διακριτή κατανομή που ακολουθεί το διωνυμικό υπόδειγμα μίας περιόδου, ισχύει πως η διακύμανση του S_1 είναι ίση με:

$$Var[S_1] = E[S_1^2] - E[S_1]^2 = S_t^2(P_uu^2 + (1 - P_u)d^2) - S_t^2e^{2r\delta t} \tag{2.15}$$

και απαιτούμε η διακύμανση της λογαριθμικής κατανομής 2.13 να ισούται με αυτή της διακριτής 2.15, δηλαδή

$$S_te^{2r\delta t}(e^{\sigma^2\delta t} - 1) = S_t^2(P_uu^2 + (1 - P_u)d^2) - S_t^2e^{2r\delta t},$$

και καταλήγουμε πως:

$$e^{2r\delta t + \sigma^2\delta t} = P_uu^2 + (1 - P_u)d^2. \tag{2.16}$$

Αντικαθιστώντας έπειτα το P_u στο δεύτερο μέλος της 2.16, έχουμε:

$$\begin{aligned} P_u u^2 + (1-P_u)d^2 &= \frac{e^{r\delta t}-d}{u-d}u^2 + \frac{u-e^{r\delta t}}{u-d}d^2 \\ &= \frac{u^2 e^{r\delta t} - u^2 d + ud^2 - d^2 e^{r\delta t}}{u-d} \\ &= \frac{(u^2-d^2)e^{r\delta t} - (u-d)}{u-d} \\ &= (u+d)e^{r\delta t} - 1, \end{aligned}$$

και καταλήγουμε πως:

$$e^{2r\delta t+\sigma^2\delta t} = (u+d)e^{r\delta t} - 1,$$

όπου αντικαθιστώντας με το $u = 1/d$ και έπειτα πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με u, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$u^2 e^{r\delta t} - u(1+e^{2r\delta t+\sigma^2\delta t}) + e^{r\delta t} = 0.$$

Η παραπάνω μορφή μπορεί να θεωρηθεί ως μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς την άγνωστη παράμετρο u. Υπολογίζουμε λοιπόν τη διακρίνουσα:

$$u = \frac{(1+e^{2r\delta t+\sigma^2\delta t}) + \sqrt{(1+e^{2r\delta t+\sigma^2\delta t})^2 - 4e^{2r\delta t}}}{2e^{r\delta t}}. \tag{2.17}$$

Ίσως τα πράγματα να ήταν πιο έυκολα εάν απλοποιούσαμε την υπόριζη ποσότητα της σχέσης 2.17 ως εξής [‡]:

$$1 + (e^{2r\delta t+\sigma^2\delta t})^2 - 4e^{2r\delta t} \approx [2 + (2r+\sigma^2)\delta t]^2 - 4(1+2r\delta t) \approx 4\sigma^2\delta t.$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας την υπόριζη τιμή που βρήκαμε στην 2.17, έχουμε:

$$\begin{aligned} u &\approx \frac{2 + (2r+\sigma^2)\delta t + 2\sigma\sqrt{\delta t}}{2e^{r\delta t}} \\ &\approx \left(1 + r\delta t + \frac{\sigma^2}{2}\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\right)(1 - r\delta t) \\ &\approx 1 + r\delta t + \frac{\sigma^2}{2}\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} - r\delta t \\ &= 1 + \sigma\sqrt{\delta t} + \frac{\sigma^2}{2}\delta t. \end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση δεν είναι τίποτα παραπάνω παρά το δεύτερης τάξης ανάπτυγμα Taylor του $e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$. Άρα καταλήγουμε στο $u = \sigma\sqrt{dt} \pm 1$ και επομένως:

$$u = 1 + \sigma\sqrt{\delta t} \; = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \tag{2.18}$$

και

$$d = \frac{1}{u} \; = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}, \tag{2.19}$$

[‡]Από τις σειρές Taylor έχουμε ότι:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots \approx 1 + x$$

για x μικρό.

όπου, οι ποσότητες u και d αποτελούν την παράμετρο ανοδικής και καθοδικής κίνησης του δικαιώματος, όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως. Η σχέση $ud = 1$ ισχύει για τα υποδείγματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στην συνέχεια, μιας και στην παρούσα εργασία δουλεύουμε με συνδυαστικά δένδρα, αλλά γενικότερα αυτό δεν ισχύει για όλα τα υποδείγματα, π.χ. βλ. Tian [28], το οποίο δεν αποτελεί συνδυαστικό δένδρο. Οι ποσότητες αυτές είναι γνωστές ως οι παράμετροι Cox, Ross & Rubinstein.

2.6 Βασικά σημεία κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό ήρθαμε σε πρώτη επαφή με το πρόβλημα της τιμολόγησης παραγώγων προϊόντων. Παρουσιάσαμε μια ευρέως διαδεδομένη τεχνική τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης (και συγκεκριμένα δικαιωμάτων γραμμένα σε μετοχές) σε διακριτό χρόνο, το λεγόμενο διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης ή διωνυμικό δένδρο τιμολόγησης, το οποίο προτάθηκε τον Sharpe [27] και στην συνέχεια ήρθε στην μορφή που είναι και σήμερα από τους Cox-Ross-Rubinstein [19]. Το διωνυμικό υπόδειγμα, παρά την απλότητά του αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία της Χρηματοοικονομικής Μηχανικής. Χαρακτηριστικό είναι ότι ακόμη και στις μέρες μας, τα δικαιώματα επί μετοχών Αμερικάνικου τύπου, τιμολογούνται βάσει του υποδείγματος αυτού. Πιο συγκεκριμένα είδαμε:

- Το διωνυμικό δένδρο σε μία περίοδο.
- Το διωνυμικό δένδρο σε δύο και περισσότερες περιόδους.
- Την αλγοριθμική προσέγγιση του υποδείγματος.
- Την αναλυτική μέθοδο τιμολόγησης.
- Αριθμητικά παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση του μοντέλου.
- Την βαθμονόμηση του διωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης.

3

Το τριωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ένα από τα πιο σημαντικά μοντέλα τιμολόγησης δικαιωμάτων, το λεγόμενο διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης, το οποίο προτάθηκε αρχικά από τον Sharpe [27] και έπειτα από τους Cox Ross & Rubinstein [19] και πρακτικά δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένα μοντέλο σε διακριτό χρόνο σύμφωνα με το οποίο μπορούμε να τιμολογίσουμε Ευρωπαϊκά και Αμερικανικά δικαιώματα προαίρεσης (αγοράς και πώλησης), αλλά και ορισμένα exotic δικαιώματα (όπως δικαιώματα με φράγματα). Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε μία επέκταση του διωνυμικού μοντέλου τιμολόγησης, αυτή του υποδείγματος του τριωνυμικού μοντέλου τιμολόγησης, το οποίο είναι ένα υπολογιστικό μοντέλο διακριτού χρόνου και ως σκοπό έχει τον υπολογισμό της τιμής του δικαιώματος που είναι γραμμένο πάνω σε έναν υποκείμενο τίτλο (έστω μετοχής). Η φιλοσοφία του τριωνυμικού μοντέλου είναι απλή. Κάνουμε ότι ακριβώς και στο διωνυμικό μοντέλο, με τη διαφορά ότι τώρα θεωρούμε σε κάθε κόμβο του δένδρου μία επιπλέον κατάσταση του κόσμου που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο η τιμή της μετοχής να μην μεταβληθεί την επόμενη χρονική στιγμή. Δηλαδή τώρα υποθέτουμε πως την επόμενη χρονική στιγμή η τιμή της υποκείμενης μετοχής μπορεί να ανέβει, να πέσει, ή να μείνει αμετάβλητη.

Στο σημείο αυτό ενδιαφέρον παρουσιάζει να κάνουμε μία σύντομη ιστορική αναδρομή υποδειγμάτων τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης. Πρώτο εμφανήστηκε το μοντέλο Black-Scholes [15]. Πρόκειται για μοντέλο τιμολόγησης Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων τόσο αγοράς όσο και πώλησης, όπου βασική φιλοσοφία είναι πως η υποκείμενη μετοχή εξελίσσεται στον χρόνο σύμφωνα με το υπόδειγμα της γεωμετρική κίνησης Brown, το οποίο αποτελεί υπόδειγμα συνεχούς χρόνου. Σύμφωνα με το υπόδειγμα της γεωμετρικής κίνησης Brown, οι λογαριθμικές αποδόσεις του υποκείμενου τίτλου (μετοχής) είναι κατανεμημένες σύμφωνα με την κανονική κατανομή. Όμως το υπόδειγμα Black-Scholes μπορεί να κάνει τιμολόγηση μόνο δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα προκύπτει αναφορικά με την τιμολόγηση δικαιωμάτων πιο σύνθετης δομής, όπως για παράδειγμα τα Αμερικανικά δικαιώματα (στα οποία η δυσκολία για την τιμολόγησή τους προκύπτει από το γεγονός ότι μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι και τη λήξη τους). Μάλιστα, το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης κατασκευάστηκε για αυτόν ακριβώς τον λόγο, να κάνει τιμολόγηση Αμερικάνικων δικαιωμάτων, κάτι το οποίο δε μπορεί να γίνει με το μοντέλο Black-Scholes. O Sharpe [27] και αργότερα οι Cox, Ross & Rubinstein [19], κατασκεύασαν το διωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης, έχοντας ως σημείο αναφοράς το μοντέλο Black-Scholes. Το τριωνυμικό υπόδειγμα προτάθηκε από τον Phelim Boyle [16] το 1988 και επεκτάθηκε περαιτέρω από τους Kamrad & Ritchken [24] το 1991, το υπόδειγμα των οποίων θα εξετάσουμε στην παρούσα εργασία. Ουσιαστικά, κάνοντας τιμολόγηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης, τόσο με το διωνυμικό όσο και με το τριωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης, καθώς αυξάνει ο αριθμός των περιόδων στο δένδρο προσεγγίζουμε ολοένα και περισσότερο το αποτέλεσμα του υποδείγματος Black-Scholes, κάτι που διαισθητικά περιμέναμε καθώς και τα δύο μοντέλα είναι κατασκευασμένα σύμφωνα με την ίδια μαθηματική δομή, που δεν είναι άλλη από την γεωμετρική κίνηση Brown. Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

3.1 Τριωνυμικό υπόδειγμα σε μία περίοδο

Το πλαίσιο το οποίο θα υιοθετήσουμε είναι το πλαίσιο του διωνυμικού υποδείγματος στο οποίο θεωρούμε ένα δικαίωμα προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου γραμμένο σε μία μετοχή που δεν πληρώνει μέρισμα. Ο στόχος μας εδώ όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι να κάνουμε τιμολόγηση του δικαιώματος αυτού, μόνο που τώρα θα χρησιμοποιήσουμε ένα διαφορετικό υπόδειγμα, το τριωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης. Η ουσιαστική υπόθεση του υποδείγματος αυτού είναι πως η υποκείμενη μετοχή εξελίσσεται στον χρόνο με τον εξής απλό τρόπο: σε κάθε χρονικό βήμα θεωρούμε ότι η υποκείμενη μετοχή μπορεί να πάρει τρεις διαφορετικές τιμές (καταστάσεις του κόσμου), μία ανοδική, μία καθοδική και και μία οριζόντια κατάσταση, κατά την οποία η τιμή της μετοχής παραμένει αμετάβλητη (σε αντίθεση με το διωνυμικό υπόδειγμα, που θεωρούμε δύο νέες πιθανές τιμές, μία ανοδική και μία καθοδική). Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τριωνυμικό δέντρο σε μία περίοδο, επομένως έχουμε τρία πιθανά σενάρια για την έκβαση της μετοχής την επόμενη χρονική στιγμή (όπου τυγχάνει να είναι και το τέλος της ζωής του δικαιώματος). Αυτό, παρόλο που δεν είναι πολύ ρεαλιστικό, εξακολουθεί να είναι πιο ρεαλιστικό από την υπόθεση του διωνυμικού υποδείγματος, σύμφωνα με την οποία έχουμε δύο μόνο πιθανά σενάρια για την υποκείμενη μετοχή, δηλαδή την μετοχή πάνω στην οποία είναι γραμμένο το δικαίωμα την επόμενη χρονική στιγμή, ένα ανοδικό και ένα καθοδικό. Έτσι επιτυγχάνουμε να φθάσουμε στο τέλος του δέντρου και να έχουμε περισσότερα διαφορετικά σενάρια για την έκβαση της μετοχής και κατά συνέπεια για την απόδοση του δικαιώματος. Η τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης Ευρωπαϊκού και Αμερικάνικου τύπου, μπορεί να γίνει αποτελεσματικά με την βοήθεια του υποδείγματος αυτού. Για να συμβεί αυτό όμως, πρέπει να κατασκευάσουμε ένα μαθηματικό πλαίσιο το οποίο θα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε και τις αντίστοιχες πιθανότητες η μετοχή να ανέβει, να πέσει ή να μείνει αμετάβλητη. Οι υποθέσεις - απλουστεύσεις τις οποίες θα ακολουθήσουμε στο μοντέλο, είναι ίδιες με αυτές του διωνυμικού μοντέλου.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση, για το τριωνυμικό υπόδειγμα, στην επόμενη χρονική στιγμή η τιμή της μετοχής όπως είπαμε μπορεί να αυξηθεί, θα παραμένει σταθερή ή να μειωθεί. Ουσιαστικά, εδώ έχουμε να κάνουμε με μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, η οποία μπορεί να πάρει τρείς διαφορετικές τιμές, με τρείς αντίστοιχες πιθανότητες. Η προσέγγιση των Kamrad & Ritchken [24], (των οποίων την προσέγγιση ακολουθούμε στην εργασία αυτή) βασίζεται στην υπόθεση πως ο υποκείμενος τίτλος (μετοχή) ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown. Κατόπιν, για να υπολογίσουν τις ζητούμενες τρεις πιθανότητες εξίσωσαν τις δύο πρώτες ροπές της παραπάνω διακριτής κατανομής με αυτές της συνεχούς. Πιο αναλυτικά, θεωρούμε πως το υποκείμενο στοιχείο (μετοχή), ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown, όπου r επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και $\sigma > 0$ η μεταβλητότητα των τιμών της μετοχής. Πρακτικά αυτό σημαίνει πως σε ένα μικρό χρονικό διάστημα μήκους δt, οι τιμές της μετοχής εξελίσσονται με βάση τον παρακάτω κανόνα:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma dW_t, \tag{3.1}$$

η οποία σχέση μας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο συνδέεται η μεταβολή της τιμής της μετοχής στο χρονικό διάστημα $[t, t+\delta t]$ (δηλαδή το dS_t), με την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t (δηλαδή το S_t) και $(W_t, t \geq 0)$, ορίζουμε μία τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown. Για να λυθεί ωστόσο η παραπάνω εξίσωση 3.1, απαιτούνται ειδικές τεχνικές της Στοχαστικής Ανάλυσης (Λογισμός κατά Itô). Η λύση της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (βλ. Εξίσωση 2.11) μπορεί να δώσει την μεταβολή της τιμής της μετοχής από τον χρόνο t στον χρόνο $t + \delta t$, ως εξής:

$$S_{t+\delta t} = S_t \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t + \sigma \delta W_t\right], \tag{3.2}$$

Λογαριθμίζοντας την εξίσωση 3.2, παίρνουμε:

$$\ln\left(\frac{S_{t+\delta t}}{S_t}\right) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t + \sigma\delta W_t := \zeta(t), \tag{3.3}$$

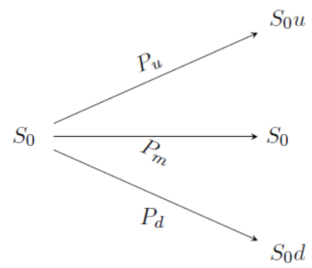
το οποίο $\zeta(t)$ αποτελεί μία συνεχή τυχαία μεταβλητή, όπου $\zeta(t)$, μια τυχαία μεταβλητή κανονικά κατανεμημένη, με μέση τιμή $\mu\delta t$, όπου $\mu = r - 0.5\sigma^2$ και διακύμανση $\sigma^2\delta t$. Ισοδύναμα η σχέση 3.3, μπορεί να γραφεί ως:

$$\ln[S_{t+\delta t}] = \ln[S_t] + \zeta(t).$$

Όπως έχουμε ήδη προαναφέρει η βασική φιλοσοφία είναι να προσεγγίσουμε την $\zeta(t)$ με μία διακριτή τυχαία μεταβλητή τριών αλμάτων, την οποία συμβολίζουμε $\zeta^a(t)$ στο διάστημα $[t, t+\delta t]$. Η τυχαία μεταβλητή $\zeta^a(t)$, ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\zeta^a(t) = \begin{cases} \upsilon, & P_u \\ 0, & P_m \\ -\upsilon, & P_d \end{cases}$$

Το υ μας οδηγεί στην παράμετρο ανοδικού βήματος ενώ το $-\upsilon$ στην παράμετρο καθοδικού βήματος. Ο βασικός στόχος της προσέγγισης αυτής είναι να υπολογίσουμε τις πιθανότητες P_u, P_m και P_d.



Σχήμα 3.1: Εξέλιξη τιμών μετοχής στο τριωνυμικό δένδρο

Παρατήρηση 5. Οι Kamrad & Ritchken [24] ορίσαν το υ με παρόμοιο τρόπο με αυτόν του διωνυμικού υποδείγματος των Cox, Ross & Rubinstein [19], $\upsilon = \lambda\sigma\sqrt{\delta t}$ και επειδή το δένδρο είναι πολλαπλασιαστικό έχουμε $u = e^{\upsilon}$ και $d = e^{-\upsilon}$, οι παράμετροι ανοδικού και καθοδικού βήματος. Μία άλλη σημαντική παρατήρηση για την περίπτωση του τριωνυμικού υποδείγματος των Kamrad & Ritchken [24], είναι η εισαγωγή της παραμέτρου $\lambda \geq 1$ η οποία είναι μια διορθωτική παράμετρος και παίζει πολύ σημαντικό ρόλο καθώς κρατάει τις τεχνητές πιθανότητες P_u, P_m, P_d, μεταξύ του $[0,1]$.

Για να φέρουμε εις πέρας τον παραπάνω στόχο, θα εξισώσουμε την μέση τιμή και την διακύμανση της συνεχούς κατανομής, με αυτές της παραπάνω διακριτής κατανομής. Η συνεχής κατανομή εδώ είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu\delta t$ και διακύμανση $\sigma^2\delta t$. Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε την μέση τιμή και την διακύμανση της $\zeta^a(t)$.

$$\begin{aligned} E\left(\zeta^a(t)\right) &= P_u\upsilon + P_m 0 + P_d(-\upsilon) \\ &= u(P_u - P_d) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} Var\left(\zeta^a(t)\right) &= E\left[\zeta^a(t)^2\right] - \left[E\left(\zeta^a(t)\right)\right]^2 \\ &= P_u\upsilon^2 + P_d\upsilon^2 - [\upsilon(P_u - P_d)]^2 \\ &= \upsilon^2(P_u + P_d) - \upsilon^2(P_u - P_d)^2 \end{aligned}$$

- Στο σημείο αυτό, απαιτούμε η μέση τιμή της κανονικής κατανομής να ισούται με αυτή της διακριτής:

$$\upsilon(P_u - P_d) = \mu\delta t. \tag{3.4}$$

- Απαιτούμε έπειτα η διακύμανση της κανονικής κατανομής να ισούται με αυτή της διακριτής:

$$\upsilon^2(P_u + P_d) - \upsilon^2(P_u - P_d)^2 = \sigma^2\delta t.$$

Παρατηρούμε πως $\upsilon(P_u - P_d) = \mu\delta t$, επομένως και $\upsilon^2(P_u - P_d)^2 = \mu^2(\delta t)^2 = 0$, εφόσον το δt είναι κάτι πολύ μικρό, το $(\delta t)^2$ αποτελεί μία ποσότητα αμελητέα, επομένως μπορεί να παραληφθεί. Έτσι,

$$\upsilon^2(P_u + P_d) = \sigma^2\delta t. \tag{3.5}$$

Καταλήγουμε επομένως στο σύστημα 3.6 το οποίο αποτελείται από τις εξισώσεις 3.4 και 3.5 και έχουμε δύο αγνώστους, το P_u και το P_d. Αρχικά αντικαθιστούμε το υ στις σχέσεις αυτές και έτσι το σύστημα που προκύπτει έχει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} (\sigma\lambda\sqrt{\delta t})^2(P_u + P_d) &= \sigma^2\delta t \\ \sigma\lambda\sqrt{\delta t}(P_u - P_d) &= \mu\delta t. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Προχωρώντας το σύστημα, λύνουμε την δεύτερη εξίσωση ως προς P_u:

$$P_u = \frac{\mu\delta t}{\sigma\lambda\sqrt{\delta t}} + P_d,$$

και έπειτα αντικαθιστώντας την στη δεύτερη εξίσωση (και με κάποιες ακόμη πράξεις)

$$(\sigma\lambda\sqrt{\delta t})^2\left(\frac{\mu\delta t}{\sigma\lambda\sqrt{\delta t}} + 2P_d\right) = \sigma^2\delta t.$$

Καταλήγουμε τελικά πως:

$$\begin{aligned} P_u &= \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{\delta t}}{2\sigma\lambda} \\ P_d &= \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{\delta t}}{2\sigma\lambda} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Εφόσον οι ποσότητες P_u, P_m, P_d είναι πιθανότητες, θα ισχύει επίσης ότι $P_u + P_m + P_d = 1$, ως άθροισμα πιθανοτήτων δηλαδή, να είναι ίσες με τη μονάδα. Επομένως αντικαθιστώντας στην εξίσωση $P_u + P_m + P_d = 1$, τις ποσότητες P_u και P_d που μόλις υπολογίσαμε και λύνοντας ως προς P_m παίρνουμε πως:

$$P_m = 1 - \frac{1}{\lambda^2}. \tag{3.8}$$

Καταλήγουμε με τον τρόπο αυτό στο P_m και τελικά πιθανότητες P_u, P_m και P_d, οι οποίες μας είναι πολύ σημαντικές ώστε να κάνουμε τιμολόγηση στο τριωνυμικό υπόδειγμα.

Παρατήρηση 6. Σε αντίθεση με το διωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης του προηγούμενου κεφαλαίου, στο τριωνυμικό υπόδειγμα (στη γενική του μορφή), εμφανίζεται ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα. Το πρόβλημα πηγάζει από το γεγονός πως η αξία ενός αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή t δεν καθορίζεται μοναδικά από την αξία του την χρονική στιγμή T. Αυτό αποδεικνύεται μαθηματικά, γεγονός όμως που ξεφεύγει από τα πλαίσια της εργασίας αυτής, θα μπορούσαμε να πούμε όμως πως ο λόγος αυτός είναι η ύπαρξη της μεσαίας κατάστασης (πιθανότητας P_m). Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο να μην έχουμε πάντα μία μοναδική τιμή για το δικαίωμα, γι' αυτό τον λόγο η αγορά του τριωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης, λέγεται μη πλήρης. Μπορούμε όμως να κάνουμε τιμολόγηση, κάτω από κάποιες επιπλέον τεχνικές προϋποθέσεις, οι οποίες όμως δεν θα αναφερθούν στην εργασία αυτή, μιάς και ξεφεύγουν από τα πλαίσιά της. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να μετατρέψουμε την αγορά του τριωνυμικού υποδείγματος σε μία πλήρη αγορά, εάν εισάγουμε ακόμη έναν τίτλο με κίνδυνο, ή αν κρατήσουμε σταθερή την πιθανότητα της μεσαίας κατάστασης (πιθανότητα P_m) ή δίνοντας μια συγκεκριμένη τιμή για το λ. Η μέθοδος που ακολουθούμε στα κεφάλαια 3 και 6, είναι να κρατήσουμε σταθερή την τιμή της μεσαίας κατάστασης και αυτό το επιτυγχάνουμε διαλέγοντας μία συγκεκριμένη τιμή για το λ. Καταλήγουμε έτσι σε ένα κατάλληλα ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο μέτρο, κατασκευασμένο από τις πιθανότητες P_u, P_m, P_d και μας οδηγεί σε μία μοναδική τιμή για το δικαίωμα. Για περισσότερες πληροφορίες βλ. Kamrad & Ritchken [24] & Pliska [26].

Παρατήρηση 7. Παρατηρώντας τις Εξισώσεις 3.7 και 3.8, αυτό που αμέσως βλέπουμε είναι πως οι πιθανότητες P_u, P_d, P_m, είναι συναρτήσεις του λ. Επομένως για διαφορετικές κάθε φορά τιμές του λ, παίρνουμε και διαφορετικές πιθανότητες. Εφόσον τα P_u, P_d, P_m, εκφράζουν τις πιθανότητες ανόδου, καθόδου και οριζοντίου βήματος της τιμής της μετοχής, θα περίμενε κανείς οι ποσότητες αυτές να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός και επιπλέον να αθροίζουν στη μονάδα. Στο σημείο αυτό κοιτώντας τον Πίνακα 3.1 προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα. Στον Πίνακα 3.1 έχουμε υπολογίσει για μία συγκεκριμένη περίπτωση Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς τα P_u, P_d και P_m καθώς και το άθροισμά τους το οποίο ισούται με την μονάδα, για διάφορες τιμές του λ από 0.2 μέχρι 2. Παρατηρούμε πως μεταβάλλονται οι τιμές των πιθανοτήτων του τριωνυμικού υποδείγματος για διάφορα λ. Βλέπουμε επίσης πως η τιμή της παραμέτρου λ πρέπει να είναι $\lambda \geq 1$ (επιβεβαιώνοντας έτσι τα αποτελέσματα των Kamrad & Ritchken [24]), μιάς και αν $\lambda < 1$, το P_m θα πάρει αρνητικές τιμές, ενώ τα P_u και P_d μεγαλύτερα από την μονάδα, πράγμα το οποίο δεν θέλουμε γιατί πρόκειται για πιθανότητες. Αυτό άλλωστε αποτελεί και το μεγαλύτερο πρόβλημα στην ανάλυση του Boyle [16] το 1988 και για τον λόγο αυτό οι Kamrad & Ritchken [24] πρότειναν να χρησιμοποιήσουμε την παράμετρο $\lambda \geq 1$. Για $\lambda \geq 1$, βλέπουμε πως τα P_u, P_d και P_m είναι μεταξύ του μηδέν και του ένα, είναι όλα θετικά και αθροίζουν στη μονάδα. Αν το $\lambda = 1$, παρατηρούμε πως η πιθανότητα $P_m = 0$, και μάλιστα (όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο) όσο μεγαλώνει ο αριθμός των χρονικών περιόδων Ν του δένδρου, τα P_u και P_d τα οποία δίνονται από την εξίσωση 3.7, θα προσεγγίζουν τα P_u και P_d του διωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης που δίνονται από την Εξίσωση 2.7.

Ένα πολύ ενδιαφέρον ζήτημα που προκύπτει στο σημείο αυτό, είναι η εύρεση της κατάλληλης τιμής του λ (αν φυσικά υπάρχει μια τέτοια κατάλληλη τιμή για κάθε περίπτωση). Το θέμα αυτό ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας εργασίας καθώς αποτελεί αντικείμενο έρευνας από μόνο του. Αναφέρουμε πάντως, πως μέσα από προσομοιώσεις στις οποίες τα δικαιώματα την χρονική στιγμή 0 είναι ATM, ITM & OTM οι Kamrad & Ritchken κατέληξαν στην τιμή $\lambda = 1,2247$, αφού είδαν πως για αυτή την τιμή κατά μέσο όρο παίρνουν τα καλύτερα αποτελέσματα (για την περίπτωση ενός Ευρωπαίκού δικαιώματος αγοράς), η οποία αντιστοιχεί στην πιθανότητα οριζοντίου άλματος $P_m = 1/3$. Οι Kamrad & Ritchken, για διάφορες περιπτώσεις Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης, κατέληξαν στο συμπέρασμα πως όταν η πιθανότητα οριζοντίου άλματος είναι κοντά στο 1/3, μας δίνει πολύ καλά αποτελέσματα, οπότε δεν θα επεκταθούμε περαιτέρω στο θέμα και θα μείνουμε στην τιμή αυτή.

Πίνακας 3.1: Τιμές πιθανοτήτων Τριωνυμικού Μοντέλου για διάφορα λ, για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$, $N = 50$.

λ	Pu	Pm	Pd	Άθροισμα
0.2	12.5177	-24.000	12.4823	1
0.4	3.1338	-5.2500	3.1162	1
0.6	1.3948	-1.7778	1.3830	1
0.8	0.7857	-0.5625	0.7768	1
1.0	0.5035	0	0.4965	1
1.2	0.3502	0.3056	0.3443	1
1.4	0.2576	0.4898	0.2526	1
1.6	0.1975	0.6094	0.1931	1
1.8	0.1563	0.6914	0.1524	1
2.0	0.1268	0.7500	0.1232	1
1.22474	0.3362	0.3333	0.3304	1

3.2 Αλγοριθμική φιλοσοφία τριωνυμικού υποδείγματος

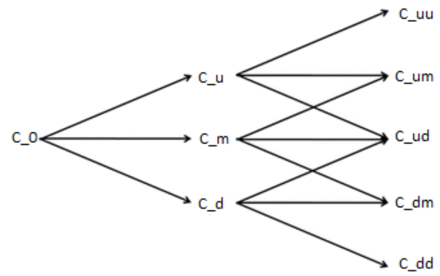
Εφόσον έχουμε υπολογίσει πιο πάνω με μια κατάλληλη διαδικασία τις πιθανότητες που αντιστοιχούν σε ανοδική, καθοδική κίνηση καθώς και στο ενδεχόμενο η μετοχή να παραμείνει αμετάβλητη, είμαστε σε θέση να δούμε πως θα χρησιμοποιήσουμε το τριωνυμικό υπόδειγμα στην πράξη για να κάνουμε τιμολόγηση. Αρχικά λοιπόν, θα εξετάσουμε το τριωνυμικό μεντέλο μίας περιόδου. Εξακολουθούμε να θεωρούμε πως έχουμε ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου γραμμένο πάνω σε μία μετοχή. Η αλγοριθμική φιλοσοφία του υποδείγματος είναι ακριβώς ίδια με αυτή του διωνυμικού. Ξεκινάμε από το τέλος του δένδρου και προχωράμε προς τα πίσω δουλεύοντας κάθε φορά (σε κάθε κόμβο) τοπικά με τριωνυμικά δένδρα μιάς περιόδου. Θέτουμε την τρέχουσα τιμή της μετοχής S_0, με $S_0 > 0$ την χρονική στιγμή $t = 0$, ενώ $S_{t_1} := S_1 > 0$ την χρονική στιγμή $t = t_1$ και τιμή εξάσκησης K. Αρχικά η τιμή της μετοχής μας είναι γνωστή από την παρατήρησή της στην χρηματιστηριακή αγορά, ενώ στη συνέχεια λόγω της αβεβαιότητας σε σχέση με την εξέλιξη των μελλοντικών τιμών της μετοχής $(t = t_1)$, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την τιμή της μετοχής κατά τη χρονική στιγμή $t = t_1$, μιάς και πρόκειται για μία τυχαία μεταβλητή. Πρέπει να μοντελοποιήσουμε κατάλληλα, δημιουργώντας ένα υπόδειγμα το οποίο μπορεί να παίρνει τρεις διαφορετικές τιμές (καταστάσεις της οικονομίας), καθώς πηγαίνουμε από την χρονική στιγμή $t = 0$ στην χρονική στιγμή $t = t_1$, μία ανοδική, μία καθοδική και μια οριζόντια. Έτσι την χρονική στιγμή $t = 0$, η τιμή της μετοχής είναι S_0 και την επόμενη χρονική στιγμή $(t = t_1)$ μπορεί να κινηθεί ανοδικά και να γίνει: $S_u = S_0 u$, με πιθανότητα P_u, μπορεί να κινηθεί οριζόντια και να γίνει: $S_m = S_0$, με πιθανότητα P_m, είτε καθοδικά και να γίνει $S_d = S_0 d$, με πιθανότητα P_d. Έτσι, τα τρία πιθανά σενάρια για την αξία του δικαιώματος στο χρόνο λήξης είναι τα εξής:

- Να αυξηθεί η τιμή της μετοχής, οπότε η αξία του δικαιώματος είναι ίση με
$$C_u = max(S_u - K, 0) = max(S_0 u - K, 0)$$
- Να παραμείνει ίδια η τιμή της μετοχής, οπότε η αξία του δικαιώματος είναι ίση με
$$C_m = max(S_m - K, 0) = max(S_0 - K, 0)$$
- Να μειωθεί η τιμή της μετοχής, οπότε η αξία του δικαιώματος είναι ίση με
$$C_d = max(S_d - K, 0) = max(S_0 d - K, 0)$$

Ακολουθώντας την ίδια φιλοσοφία με το υπόδειγμα των Cox, Ross & Rubinstein [19] μίας περιόδου, η τιμή του δικαιώματος δίνεται ως:

$$C_0 = e^{-r\delta t}\left[P_u C_u + P_m C_m + P_d C_d\right]. \tag{3.9}$$

Η διαδικασία την οποία ακολουθούμε για περισσότερες περιόδους N, είναι ίδια με αυτή του απλού διωνυμικού υποδείγματος. Ουσιαστικά ξεκινάμε από το τέλος του δένδρου, υπολογίζοντας καταρχάς τις τιμές της μετοχής στο χρόνο λήξης και μετά την απόδοση του δικαιώματος στον χρόνο λήξης. Από εκεί και έπειτα, προχωρώντας οπισθοδρομικά, υπολογίζουμε την αξία του δικαιώματος σε κάθε κόμβο, δουλεύοντας τοπικά με τριωνυμικά δένδρα μίας περιόδου όπως θα δούμε και στη συνέχεια και μέσω παραδειγμάτων, έως την αρχή του δένδρου, δηλαδή το C_0.



Σχήμα 3.2: Τριωνυμικό δένδρο δύο περιόδων

Πιο πάνω είδαμε το τριωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης σε μία περίοδο, δηλαδή την πιο απλή μορφή του μοντέλου αυτού, κατά το οποίο η μετοχή μπορεί να πάρει τρεις διαφορετικές τιμές στην λήξη του δικαιώματος. Θεωρήσαμε τρία σενάρια, να ανέβει, να πέσει ή να μείνει αμετάβλητη η τιμή της μετοχής στο επόμενο χρονικό βήμα, το οποίο ήταν και το τελικό, στον χρόνο $t_1 = T$. Όπως όμως αναφέραμε, το μοντέλο θα δίνει πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα, εάν θεωρήσουμε και άλλα πιθανά σενάρια, αυτό μπορεί αν επιτευχθεί αν θεωρήσουμε περισσότερες ενδιάμεσες χρονικές στιγμές μεταξύ των $t = 0$ και $t = T$. Θα επεκτείνουμε την ανάλυση που κάναμε για το μοντέλο μίας περιόδου και να προσθέσουμε ακόμα μια χρονική περίοδο στο μοντέλο, επεκτείνοντας με τον τρόπο αυτό το πλήθος των πιθανών τελικών εκβάσεων των οποίων μπορεί να πάρει η τιμή της υποκείμενης μετοχής πάνω στην οποία έχουμε γράψει το δικαίωμα, κάνοντάς το έτσι λίγο πιο ρεαλιστικό. Τώρα λοιπόν θα προσθέσουμε μία ακόμη χρονική στιγμή, την $t = t_2$, η οποία στην περίπτωση αυτή ταυτίζεται με τον χρόνο λήξης του δικαιώματος. Όσον αφορά τώρα τις τιμές της μετοχής, συμβολίζουμε με $S_0 > 0$ την τιμή της μετοχής κατά την χρονικη στιγμή $t = 0$ όπως και προηγουμένως άλλωστε, με $S_{t_1} := S_1 > 0$ την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t = t_1$ και $S_{t_2} := S_2 > 0$ την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t = t_2$. Η τιμή της μετοχής κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ (σήμερα δηλαδή) μας είναι γνωστή δια μέσου της παρατήρησής της στην χρηματιστηριακή αγορά, όχι όμως και αυτή της S_1 και της S_2 η οποία είναι τυχαία μεταβλητή. Για να υπολογίσουμε τις πιθανές τιμές της υποκείμενης μετοχής στον χρόνο λήξης, για δύο περιόδους, θα ακολουθήσουμε την ίδια ιδέα με αυτή του τριωνυμικού δένδρου σε μία περίοδο. Τα βήματα τα οποία θα ακολουθήσουμε είναι τα εξής:

B1. Πηγαίνουμε στο τέλος του δένδρου και υπολογίζουμε στο χρόνο λήξης τις αποδόσεις του δικαιώματος:

$$C_{uu} = max(S_{2,4} - K, 0)$$

$$C_{um} = max(S_{2,3} - K, 0)$$

$$C_{ud} = max(S_{2,2} - K, 0)$$

$$C_{dm} = max(S_{2,1} - K, 0)$$

$$C_{dd} = max(S_{2,0} - K, 0)$$

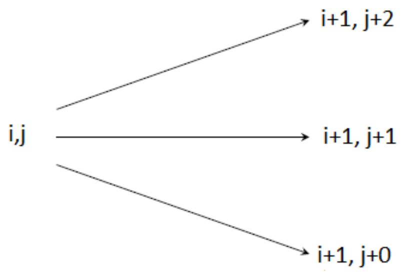
B2. Βάσει των τιμών που μόλις υπολογίσαμε, και της εξίσωσης 3.9 προχωράμε οπισθοδρομικά και υπολογίζουμε τα:

$$C_u = e^{-r\delta t}(P_u C_{uu} + P_m C_{um} + P_d C_{ud})$$
$$C_m = e^{-r\delta t}(P_u C_{um} + P_m C_{ud} + P_d C_{dm})$$
$$C_d = e^{-r\delta t}(P_u C_{ud} + P_m C_{dm} + P_d C_{dd})$$

B3. Τέλος, η διαδικασία ολοκληρώνεται μόλις φτάσουμε στην αρχή του δένδρου, υπολογίζοντας την αξία του δικαιώματος σήμερα με τον εξής τρόπο:

$$C_{0,0} = e^{-r\delta t}(P_u C_u + P_m C_m + P_d C_d).$$

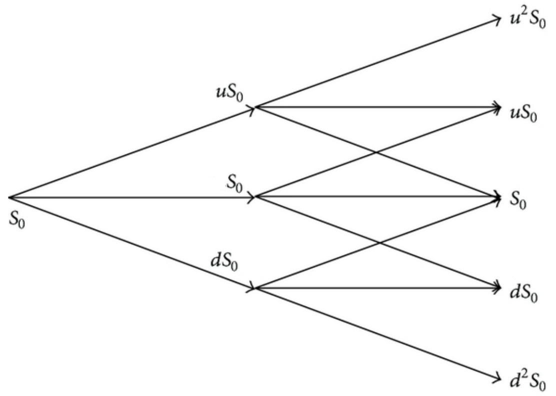
Όπως φαίνεται και από το παραπάνω σχήμα 3.2, ξεκινάμε από το τέλος του δένδρου και πηγαίνουμε προς τα πίσω, μιάς και στόχος μας είναι να φτάσουμε στην αρχή του δένδρου, η οποία αντιστοιχεί στην τιμή C_0, δουλεύοντας κάθε φορά τοπικά. Για να υπολογίσουμε την τιμή C_0 πρέπει να υπολογίσουμε τα C_u, C_m και C_d, με τον τρόπο που είδαμε στην ενότητα 3.2 καθώς και τον συντελεστή προεξόφλησης $e^{-r\delta t}$.



Σχήμα 3.3: Γενικός κόμβος τριωνυμικού δένδρου μίας περιόδου.

Ουσιαστικά έχουμε πάλι ένα δένδρο δύο διαστάσεων, το οποίο αποτελείται από κόμβους (i, j) (φυσικοί αριθμοί) κάθε ένας από τους οποίους αντιστοιχεί και σε μια διαφορετική κατάσταση της οικονομίας. Ο οριζόντιος ιδεατός άξονας i του δέντρου αντιστοιχεί στο χρόνο, με $i = 0, 1, ..., T$, (το χρονικό διάστημα T είναι χωρισμένο σε κομμάτια μήκους $\delta t = T/N$) δείχνοντάς μας κάθε φορά, πόσο απέχουμε από την αρχή του δέντρου, ενώ ο κάθετος j, $j = 0, ..., 2, ...i$ μας δείχνει τις πιθανές καταστάσεις της αγοράς την χρονική στιγμή i. Παρατηρούμε από το δέντρο, πως ο κάθε κόμβος (σημείο εκκίνησης ή συνάντησης στην περίπτωση του τριωνυμικού υποδείγματος τριών ευθύγραμμων τμημάτων) μας οδηγεί σε άλλους τρεις κόμβους (βλ. Σχήμα 3.3), οι οποίοι αντιστοιχούν σε ανοδική, οριζόντια και καθοδική κίνηση της μετοχής. Συγκεκριμένα, ο κόμβος (i, j) μας οδηγεί στον κόμβο $(i + 1, j)$, στον $(i + 1, j + 1)$, είτε στον $(i + 1, j + 2)$, όπου ο κόμβος $(i+1, j)$ εκφράζει την καθοδική κίνηση της μετοχής, ο κόμβος $(i+1, j+1)$ εκφράζει την οριζόντια κίνηση της μετοχής, ενώ ο κόμβος $(i+1, j+2)$ την ανοδική (Η σύμβαση αυτή ακολουθήθηκε στον αντίστοιχο κώδικα στο matlab).

Παρατήρηση 8. Ένας τρόπος με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της μετοχής (πάνω στην οποία είναι γραμμένο το δικαίωμα) σε κάθε κόμβο (i, j) του τριωνυμικού δένδρου, είναι ο $S_{i,j} = S_0 u^{max(j-i,0)} d^{max(i-j,0)}$. Στην πράξη έστω πως έχουμε ένα δέντρο δύο χρονικών βημάτων. Εφόσον ο αρχικός κόμβος ορίζεται ως $(0,0)$, τότε η τιμή της μετοχής την επόμενη χρονική στιγμή $t = t_1$ θα είναι $S_{i+1,j+2} = S_0 u^{max(2-1,0)} d^{max(1-2,0)} = S_0 u$, εάν η τιμή ανέβει, $S_{i+1,j+1} = S_0 u^{max(1-1,0)} d^{max(1-1,0)} = S_0 u^0 d^0 = S_0$, εάν η τιμή παραμείνει σταθερή και $S_{i+1,j} = S_0 u^{max(1-2,0)} d^{max(2-1,0)} = S_0 d$, εάν η τιμή πέσει. Στη συνέχεια, έχοντας σαν αφετηρία τον κόμβο (1,2), η τιμή της μετοχής την επόμενη χρονική στιγμή $t = t_2 > t_1$ θα είναι $S_{i+2,j+4} = S_0 u^{max(4-2,0)} d^{max(2-4,0)} = S_0 u^2$, εάν η τιμή ανέβει, $S_{i+2,j+3} = S_0 u^{max(3-2,0)} d^{max(2-3,0)} = S_0 u$, εάν η τιμή παραμείνει σταθερή και $S_{i+2,j+2} = S_0 u^{max(2-2,0)} d^{max(2-2,0)} = S_0 u^0 d^0 = S_0$, εάν η τιμή πέσει. Μετά, έχοντας σαν αφετηρία τον κόμβο (1,1), η τιμή της μετοχής την επόμενη χρονική στιγμή $t = t_2 > t_1$ θα είναι $S_{i+2,j+3} = S_0 u^{max(3-2,0)} d^{max(2-3,0)} = S_0 u$, εάν η τιμή ανέβει, $S_{i+2,j+2} = S_0 u^{max(2-2,0)} d^{max(2-2,0)} = S_0 u^0 d^0 = S_0$, εάν η τιμή παραμείνει σταθερή και $S_{i+2,j+1} = S_0 u^{max(2-3,0)} d^{max(3-2,0)} = S_0 d$, εάν η τιμή πέσει. Τέλος, με αφετηρία τον κόμβο (1,0), η τιμή της μετοχής την επόμενη χρονική στιγμή $t = t_2 > t_1$ θα είναι $S_{i+2,j+2} = S_0 u^{max(2-2,0)} d^{max(2-2,0)} = S_0 u^0 d^0 = S_0$, εάν η τιμή ανέβει, $S_{i+2,j+1} = S_0 u^{max(1-2,0)} d^{max(2-1,0)} = S_d$, εάν η τιμή παραμείνει σταθερή και $S_{i+2,j+0} = S_0 u^{max(0-2,0)} d^{max(2-0,0)} = S_0 d^2$, εάν η τιμή πέσει.



Σχήμα 3.4: Τιμές μετοχής στο τριωνυμικό δένδρο. Πηγή: Hull [22]

Τα βήματα που ακολουθούμε για να κάνουμε τιμολόγηση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος με βάση το τριωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης, είναι τα ακόλουθα:

B1. Υπολογίζουμε τις τιμές της μετοχής στην λήξη του δένδρου. Η τιμή της μετοχής στον κόμβο (i,j), προκύπτει εφόσον πραγματοποιηθούν συνολικά μέχρι τη χρονική στιγμη i, $max(j-i,0)$ ανοδικές και $max(i-j,0)$ καθοδικές κινήσεις, ενώ στο χρόνο λήξης (N,j) η τιμή της μετοχής είναι:

$$S_{N,j} = S_0 u^{max(j-N,0)} d^{max(N-j,0)}.$$

B2. Υπολογίζουμε την απόδοση του δικαιώματος στην λήξη του δένδρου. Η απόδοση του δικαιώματος στον κόμβο (N,j) για ένα δικαίωμα αγοράς είναι:

$$C_{N,j} = max(S_{N,j} - K, 0),$$

ενώ για Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης πώλησης, είναι:

$$C_{N,j} = max(K - S_{N,j}, 0).$$

B3. Τέλος, προχωρώντας προς τα πίσω, υπολογίζουμε την αξία του δικαιώματος σε κάθε κόμβο, ως εξής:

$$C_{i,j} = e^{-r\delta t}(P_u C_{i+1,j+2} + P_m C_{i+1,j+1} + P_d C_{i+1,j}), \tag{3.10}$$

μέχρι να οδηγηθούμε στο $C_{0,0}$, όπου αποτελεί τη ζητούμενη τιμή, δηλαδή την τιμή του δικαιώματος σήμερα.

Στη συνέχεια θα δούμε ένα παράδειγμα τιμολόγησης με το τριωνυμικό δένδρο σε μία περίοδο.

Παράδειγμα 6. *Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης αγοράς, γραμμένο πάνω σε μία μετοχή, με τα εξής χαρακτηριστικα:*

S_0	K	T	N	r	σ	λ
50	*50*	*1*	*1*	*0.1*	*0.4*	1.2247

Όπου, S_0 η τιμή της μετοχής, K η τιμή εξάσκησης της μετοχής, T ο χρόνος εως τη λήξη, N οι περίοδοι εώς τη λήξη, r το επιτόκιο (ετήσιο) και σ η μεταβλητότητα, λ η παράμετρος τέντωσης. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε $\delta t = T/N = 1$, ενώ οι παράμετροι του μοντέλου θα είναι $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\delta t}} = e^{1.22474 \cdot 0.4\sqrt{1}} = 1.6321$ και $d = e^{-\lambda\sigma\sqrt{\delta t}} = 0.6127$. Η πιθανότητα ανοδικής κίνησης θα είναι $P_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{\delta t}}{2\sigma\lambda} = 0.3537$, της καθοδικής $P_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{\delta t}}{2\sigma\lambda} = 0.3129$ και της οριζόντιας κίνησης $P_m = 1 - \frac{1}{\lambda^2} = 0.333$. Το $e^{-r\delta t} = 0.9048$ είναι ο συντελεστής προεξόφλησης. Αρχίζοντας με την τιμή υποκείμενης της μετοχής $S_0 = 50$, υπολογίζουμε τις τιμές της μετοχής στο χρόνο λήξης με τον τρόπο που περιγράφεται στο B1.

$$\begin{aligned} S_{1,2} &= S_0 u^{max(j-N,0)} d^{max(N-j,0)} \\ &= 50 \cdot 1.6321^{max(2-1,0)} 0.6127^{max(1-2,0)} = 81.6073, \end{aligned}$$

όπου $S_{1,2}$, η τιμή της μετοχής σε περίπτωση ανόδου,

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= S_0 u^{max(j-N,0)} d^{max(N-j,0)} = \\ &= 50 \cdot 1.6321^{max(1-1,0)} 0.6127^{max(1-1,0)} = 50, \end{aligned}$$

όπου $S_{1,1}$ η τιμή της μετοχής σε περίπτωση οριζοντίου βήματος και

$$\begin{aligned} S_{1,0} &= S_0 u^{max(j-N,0)} d^{max(N-j,0)} \\ &= 50 \cdot 1.6321^{max(0-1,0)} 0.6127^{max(1-0,0)} = 30.6345, \end{aligned}$$

όπου $S_{1,0}$ η τιμή της μετοχής σε περίπτωση καθόδου. Έπειτα θα υπολογίσουμε την αξία του δικαιώματος στο χρόνο λήξης με τον τρόπο που περιγράφεται στο B2.

$$C_{1,2} = max(S_{1,2} - K, 0) = max(81.6073 - 50, 0) = 31.607,$$

όπου $C_{1,2}$ η αξία του δικαιώματος σε περίπτωση ανόδου,

$$C_{1,1} = max(S_{1,1} - K, 0) = max(50 - 50, 0) = 0,$$

όπου $C_{1,1}$ η αξία του δικαιώματος σε περίπτωση οριζοντίου βήματος και

$$C_{1,0} = max(S_{1,0} - K, 0) = max(30.6345 - 50, 0) = 0,$$

όπου $C_{1,0}$ η αξία του δικαιώματος σε περίπτωση καθόδου. Έπειτα προχωρώντας αναδρομικά με τον τρόπο που περιγράφεται στο B3:

$$C_{0,0} = 0.9048 \cdot (31.607 \cdot 0.3537 + 0 \cdot 0.333 + 0 \cdot 0.3129) = 10.1170,$$

που αποτελεί και η ζητούμενη τιμή, δηλαδή η τιμή του δικαιώματος σήμερα.

Παράδειγμα 7. *Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης αγοράς, γραμμένο πάνω σε μία μετοχή, με τα εξής χαρακτηριστικά:*

S_0	K	T	N	r	σ	λ
50	*50*	*1*	*2*	*0.1*	*0.4*	1.2247

Όπου, S_0 η τιμή της μετοχής, K η τιμή εξάσκησης της μετοχής, T ο χρόνος έως τη λήξη, N οι περίοδοι έως τη λήξη, r το επιτόκιο (ετήσιο) και σ η μεταβλητότητα, λ η παράμετρος η οποία διαφοροποιεί τον Τριωνυμικό απ το Διωνυμικό μοντέλο. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε $\delta t = T/N = 0.5$, ενώ οι παράμετροι του μοντέλου θα είναι $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\delta t}} = e^{1.22474 \cdot 0.4\sqrt{0.5}} = 1.414$ και $d = e^{-\lambda\sigma\sqrt{\delta t}} = 0.7072$. Η πιθανότητα ανοδικής κίνησης θα είναι $P_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{\delta t}}{2\sigma\lambda} = 0.3478$, της καθοδικής $P_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{dt}}{2\sigma\lambda} = 0.3189$ και της οριζόντιας κίνησης $P_m = 1 - \frac{1}{\lambda^2} = 0.333$. Το $e^{-r\delta t} = 0.9512$ είναι ο συντελεστής προεξόφλησης, ενώ $\mu = 0.02$. Αρχίζοντας με την τιμή υποκείμενης της μετοχής $S_0 = 50$, υπολογίζουμε τις τιμές των μετοχών στο χρόνο λήξης με τον εξής τρόπο:

$$
\begin{aligned}
S_{2,4} &= 50 \cdot 1.414^{max(4-2,0)} 0.7072^{max(2-4,0)} = 99.96 \\
S_{2,3} &= 50 \cdot 1.414^{max(3-2,0)} 0.7072^{max(2-3,0)} = 70.69 \\
S_{2,2} &= 50 \cdot 1.414^{max(2-2,0)} 0.7072^{max(2-2,0)} = 50 \\
S_{2,1} &= 50 \cdot 1.414^{max(1-2,0)} 0.7072^{max(2-1,0)} = 35.361 \\
S_{2,0} &= 50 \cdot 1.414^{max(0-2,0)} 0.7072^{max(2-0,0)} = 25.008
\end{aligned}
$$

Έπειτα θα υπολογίσουμε την αξία του δικαιώματος στη λήξη με τον εξής τρόπο:

$$
\begin{aligned}
C_{2,4} &= max(S_{2,4} - K, 0) = max(99.96 - 50, 0) = 49.96 \\
C_{2,3} &= max(S_{1,3} - K, 0) = max(70.69 - 50, 0) = 20.69 \\
C_{2,2} &= max(S_{2,2} - K, 0) = max(50 - 50, 0) = 0 \\
C_{2,1} &= max(S_{2,1} - K, 0) = max(35.36 - 50, 0) = 0 \\
C_{2,0} &= max(S_{2,0} - K, 0) = max(25.008 - 50, 0) = 0.
\end{aligned}
$$

Μετά προχωρώντας προς τα πίσω, υπολογίζουμε την τιμή του δικαιώματος σύμφωνα με την εξίσωση 3.10:

$$
\begin{aligned}
C_{1,2} &= 0.9512 \cdot (49.96 \cdot 0.3478 + 20.69 \cdot 0.333 + 0 \cdot 0.3189) = 23.092 \\
C_{1,1} &= 0.9512 \cdot (20.69 \cdot 0.3478 + 0 \cdot 0.333 + 0 \cdot 0.3189) = 6.84 \\
C_{1,0} &= 0.9512 \cdot (0 \cdot 0.3478 + 0 \cdot 0.333 + 0 \cdot 0.3189) = 0.
\end{aligned}
$$

Τελικά καταλήγουμε ότι η τιμή του δικαιώματος είναι ίση με:

$$C_{0,0} = 0.9512 \cdot (23.092 \cdot 0.3478 + 6.84 \cdot 0.333 + 0 \cdot 0.3189) = 9.81.$$

Παρατήρηση 9. Μόλις είδαμε το τριωνυμικό δένδρο τιμολόγησης Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης (αγοράς και πώλησης). Ωστόσο, η ισχύς του τριωνυμικού μοντέλου φαίνεται ιδίως στην ικανότητά του να τιμολογεί Αμερικάνικα δικαιώματα, μιάς και αποτελεί μέχρι σήμερα ένα πρόβλημα ιδιαίτερα απαιτητικό λόγω της σύνθετης - πολύπλοκης δομής των δικαιωμάτων αυτού του τύπου μιας και επιτρέπουν την εξάσκηση (και) πριν το χρόνο λήξης. Έστω πως έχουμε ένα Αμερικανικό δικαίωμα αγοράς. Η ιδέα πίσω από την τιμολόγηση του δικαιώματος αυτού με το τριωνυμικό μοντέλο, είναι απλή. Εξετάζουμε σε κάθε κόμβο (i, j) του δένδρου, αν μας συμφέρει να εξασκήσουμε το δικαίωμα ή να το κρατήσουμε και να συνεχίσουμε προς τα πίσω τη διαδικασία. Η διαδικασία έχει ως εξής: Εξετάζουμε στον κόμβο (i, j):

- Αν εξασκηθεί το δικαίωμα, η αξία του (απόδοση) είναι ίση με το μέγιστο μεταξύ του μηδενός και της ποσότητας $S_{i,j} - K$, δηλαδή $max(0, S_{i,j} - K)$.

- Αν δεν εξασκηθεί το δικαίωμα, τότε υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο που υπολογίζουμε και τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης, δηλαδή

$$e^{-r\delta t}(P_u C_{i+1,j+2} + P_m C_{i+1,j+1} + P_d C_{i+1,j}).$$

Για να εξετάσουμε αν μας συμφέρει ή όχι η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος στον κόμβο (i, j), συγκρίνουμε τις δύο παραπάνω τιμές. Αν η πρώτη τιμή $max(0, S_{i,j} - K)$ υπερτερεί της δεύτερης $e^{-r\delta t}(P_u C_{i+1,j+2} + P_m C_{i+1,j+1} + P_d C_{i+1,j})$, μας συμφέρει η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος (μιας και στον κόμβο αυτό η εξάσκηση δημιουργεί μεγαλύτερη αξία). Αντίθετα, αν η δεύτερη τιμή υπερτερεί της πρώτης, τότε η πρόωρη εξάσκηση δεν μας συμφέρει (το δικαίωμα δεν συμφέρει να εξασκηθεί πρόωρα σε αυτόν τον κόμβο). Ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς δεν συμφέρει ποτέ να εξασκηθεί πριν την λήξη, άρα η αξία του θα είναι ίδια με αυτή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Συνοπτικά ωστόσο, η αξία του Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς στον κόμβο (i, j) δίνεται για Αμερικανικά δικαιώματα αγοράς από την σχέση:

$$C_{i,j} = max[e^{-r\delta t}(P_u C_{i+1,j+2} + P_m C_{i+1,j+1} + P_d C_{i+1,j}), max(0, S_{i,j} - K)],$$

ενώ για για Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης δίνεται από την σχέση:

$$C_{i,j} = max[e^{-r\delta t}(P_u C_{i+1,j+1} + P_m C_{i+1,j+1} + P_d C_{i+1,j}), max(0, K - S_{i,j})].$$

3.3 Βασικά σημεία κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε μία ακόμη ευρέως διαδεδομένη τεχνική τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης και συγκεκριμένα δικαιωμάτων γραμμένα σε μετοχές σε διακριτό χρόνο, το λεγόμενο τριωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης ή τριωνυμικό δένδρο, το οποίο προτάθηκε τον Boyle [27] και τους Kamrad & Ritchken [24]. Το υπόδειγμα αυτό είναι μια άμεση επέκταση του δυωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης, λαμβάνοντας υπόψιν μία ακόμα κατάσταση για την υποκείμενη μετοχή - να παραμείνει αμετάβλητη, την επόμενη χρονική στιγμή. Το τριωνυμικό υπόδειγμα, παρά την σχετική του απλότητά, αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο της Χρηματοοικονομικής Μηχανικής. Πιο συγκεκριμένα είδαμε:

- Το τριωνυμικό δένδρο σε μία και περισσότερες περιόδους.
- Την αλγοριθμική προσέγγιση-φιλοσοφία του υποδείγματος.
- Αριθμητικά παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση του υποδείγματος.

4

Αριθμητική μελέτη του διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης

Ο στόχος της παρούσας ενότητας είναι η αριθμητική μελέτη της συμπεριφοράς του τριωνυμικού και του διωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης, αφενός συγκρίνοντας τα μεταξύ τους αποτελέσματα και αφαιτέρου συγκρίνοντάς τα με το μοντέλο Black-Scholes [15], το οποίο έχουμε ως σημείο αναφοράς, μιας και αποτελεί βασικό μοντέλο τιμολόγησης Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων τόσο αγοράς όσο και πώλησης. Διαισθητικά και από όσα έχουμε δει και τα δύο υπόδειγμα τιμολόγησης, συγκλίνουν με έναν πολύ συγκεκριμένο τρόπο (σύγκλιση σε κατανομή) στο μοντέλο Black-Scholes και ο λόγος είναι γιατί τα και δύο υποδείγματα (διωνυμικό και τριωνυμικό) είναι κατασκευασμένα ώστε να προσεγγίζουν την κατανομή της γεωμετρικής κίνησης Brown, η οποία αποτελεί την βάση του υποδείγματος Black-Scholes. Για περισσότερες πληροφορίες που αφορούν το κομμάτι της σύγκλισης βλ. Cox, Ross & Rubinstein [19]. Πιο συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο αυτό:

- Έχοντας ως σημείο αναφοράς το μοντέλο Black-Scholes, θα εξετάσουμε αριθμητικά την συμπεριφορά, συμπεριλαμβανομένης και της ταχύτητας σύγκλισης, τόσο του διωνυμικού όσο και του τριωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης, σε ένα πεδίο Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων.
- Θα εξετάσουμε την συμπεριφορά (ευαισθησία) των υποδειγμάτων αυτών συναρτήσει των διαφόρων υποκείμενων παραμέτρων τους (σ, r, T, N, λ). Η μελέτη αυτή θα γίνει βάσει της σύγκρισης των αποτελεσμάτων τους ως προς το αποτέλεσμα του μοντέλου Black-Scholes, αλλά και της μεταξύ τους απόστασης.

Σε ό,τι ακολουθεί όπου Δ.Υ. εννοείται διωνυμικό υπόδειγμα, όπου Τ.Υ. εννοείται τριωνυμικό υπόδειγμα, ενώ όπου B.S. εννοείται το υπόδειγμα Black-Scholes . Στα γραφήματα που ακολουθούν, η μπλε γραμμή συμβολίζει το Δ.Υ και η κόκκινη το Τ.Υ. τιμολόγησης. Τέλος, ο όρος απόσταση συμβολίζει την διαφορά στις τιμές μεταξύ των υποδειγμάτων.

4.1 Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς

Στην παράγραφο που ακολουθεί θεωρούμε ένα δικαίωμα προαίρεσης αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου που είναι γραμμένο πάνω σε μία μετοχή που δεν πληρώνει μέρισμα. Με S_0 συμβολίζουμε την τιμή της υποκείμενης μετοχής την χρονική στιγμή $t = 0$, με r το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, με σ την μεταβλητότητα των τιμών της υποκείμενης μετοχής, με T τον χρόνο λήξης του δικαιώματος και με N τον αριθμό των περιόδων στο διωνυμικό και στο τριωνυμικό δένδρο.

4.1.1 Συμπεριφορά του τριωνυμικού υποδείγματος για διαφορετικές τιμές του λ (σταθερό N)

Στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζονται οι τιμές του δικαιώματος με βάση το τριωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης, για διάφορες τιμές του $\lambda \in [1, 2]$ και η απόστασή τους από την τιμή του μοντέλου

Black-Scholes, για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$, $N = 50$. Καταρχάς, παρατηρούμε πως καθώς το λ μεταβάλλεται, παίρνουμε διαφορετικές τιμές για την τιμή του δικαιώματος με βάση το τριωνυμικό υπόδειγμα, εφόσον για κάθε μία τιμή του λ θα αλλάζουν οι πιθανότητες P_u, P_m, & P_d ανοδικής, μεσαίας και καθοδικής κίνησης. Παρατηρούμε πως καθώς μεταβάλλεται το λ, η απόσταση από το μοντέλο Black-Scholes αυξομειώνεται. Για τιμές $\lambda < 1$, λαμβάνοντας υπόψην τον Πίνακα 3.1 γνωρίζουμε πως η πιθανότητα οριζοντίου βήματος P_m βγαίνει αρνητική και οι πιθανότητες P_u, P_d, μεγαλύτερες από την μονάδα. Επομένως κάτι τέτοιο δεν έχει βάση, οπότε γι' αυτό δεν παρουσιάζουμε τις αντίστοιχες τιμές. Ωστόσο, ως επικρατέστερη τιμή, οι Kamrad & Ritchken [24] πρότειναν την τιμή $\lambda = 1.22474$, επειδή για την τιμή αυτή κατά μέσο όρο πήραν τις μικρότερες διαφορές από το μοντέλο Black-Scholes (για την περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς). Η τιμή αυτή του λ αντιστοιχεί στην πιθανότητα οριζοντίου άλματος $P_m = 1/3$. Πράγματι, παρατηρούμε πως για μια τιμή του λ κοντά στο 1.2 παίρνουμε και την μικρότερη απόσταση από το B.S. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μια πρόχειρη επαλήθευση του ισχυρισμού των Kamrad Ritchken [24].

Πίνακας 4.1: Τιμές τριωνυμικού υποδείγματος και διαφορά από την τιμή $B.S$, για διάφορα $\lambda \in [1, 2]$. $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$, $N = 50$. (Η τιμή του διωνυμικού υποδείγματος είναι 10.12054 και η τιμή του μοντέλου Black-Scholes είναι 10.1592)

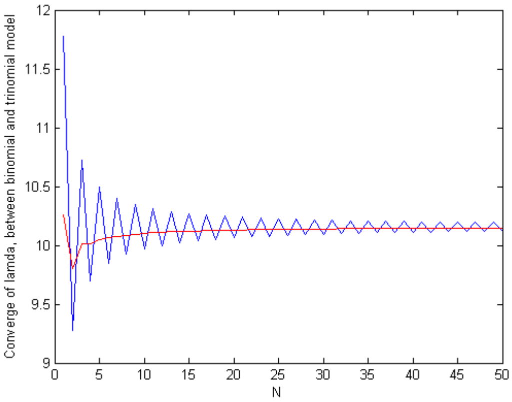
Eu Call λ	Τ.Υ.	Απόσταση Τ.Υ. από B.S
1.0	10.1183	0.0409
1.2	10.1474	0.0118
1.4	10.1392	0.0200
1.6	10.1297	0.0295
1.8	10.1189	0.0403
2.0	10.1067	0.0525
1.22474	10.1464	0.0127

4.1.2 Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από το Black-Scholes καθώς μεταβάλλεται το N και το λ.

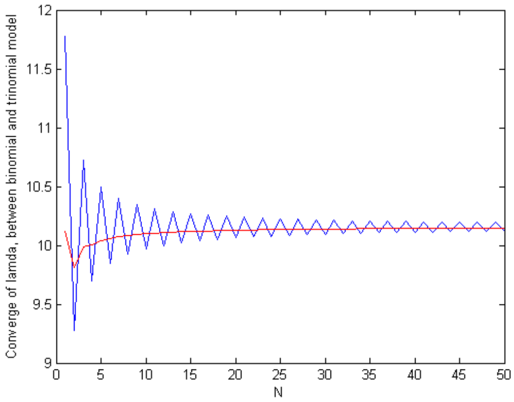
Το τριωνυμικό υπόδειγμα έχει πλεονέκτημα έναντι του διωνυμικού, μιας και έχει και μια τρίτη πιθανή κίνηση της υποκείμενης μετοχής, αυτή του οριζοντίου βήματος εν αντιθέσει με το διωνυμικό που θεωρεί πως την επόμενη χρονική στιγμή η υποκείμενη μετοχή μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να παράγει περισσότερες τιμές σε κάθε περίοδο (άρα και περισσότερα τελικά σενάρια) και για το λόγο αυτό περιμένουμε διαισθητικά το τριωνυμικό υπόδειγμα να προσεγγίζει γρηγορότερα την τιμή του μοντέλου Black-Scholes από ότι το διωνυμικό υπόδειγμα. Ωστόσο η ταχύτητα σύγκλισης του τριωνυμικού και του διωνυμικού υποδείγματος στην τιμή Black-Scholes, καθώς και η καταλληλότερη τιμή του λ (για το τριωνυμικό υπόδειγμα) φαίνονται περισσότερο ξεκάθαρα αν αφήσουμε τον αριθμό βημάτων N να μεταβάλλεται. Έτσι, αφού εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο πως συμπεριφέρεται το τριωνυμικό υπόδειγμα ως προς τις διαφορετικές τιμές του λ κρατώντας σταθερό το N, θα δούμε τώρα τι συμβαίνει στο τριωνυμικό αλλά και διωνυμικό υπόδειγμα με το N να μεταβάλλεται. Από το Σχήμα 4.1 παρατηρούμε τα εξής:

- Για μία τιμή του λ κοντά στο 1.2, το τριωνυμικό υπόδειγμα συγκλίνει πιο γρήγορα (μάλιστα από τα πέντε με δέκα πρώτα βήματα) και πιο ομαλά σε σχέση με το διωνυμικό υπόδειγμα στην τιμή Black-Scholes. Μάλιστα, το αποτέλεσμα του διωνυμικού υποδείγματος με περίπου 50 επαναλήψεις μπορεί να συγκριθεί με το αποτέλεσμα του τριωνυμικού υποδείγματος με περίπου δέκα με δεκαπέντε επαναλήψεις.

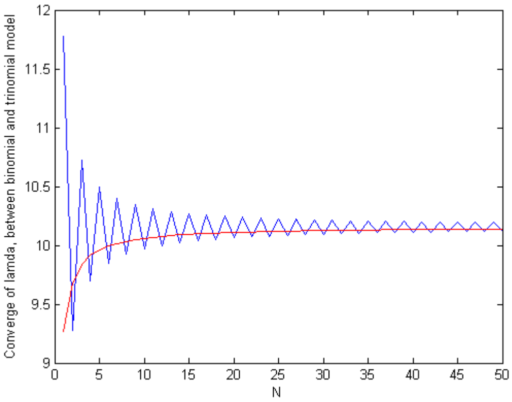
- Ανεξαρτήτως της τιμής του λ, το τριωνυμικό υπόδειγμα συγκλίνει πιο ομαλά από το διωνυμικό, στην τιμή του μοντέλου Black-Scholes. Όμως καθώς αυξάνεται το λ (πάνω από την τιμή $\lambda = 1.2$) η ταχύτητα σύγκλισης μειώνεται. Το αποτέλεσμα αυτό είναι άλλη μια πρόχειρη επαλήθευση του ισχυρισμού των Kamrad & Ritchken [24].



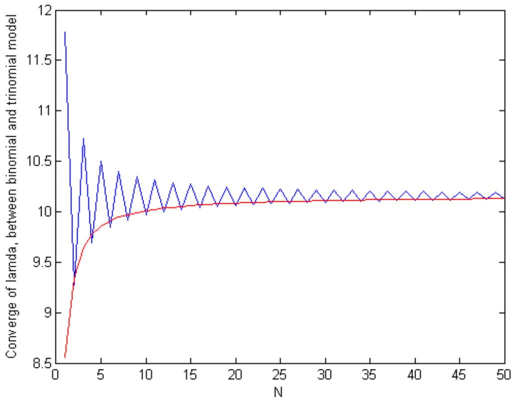
(α′) $\lambda = 1.2$



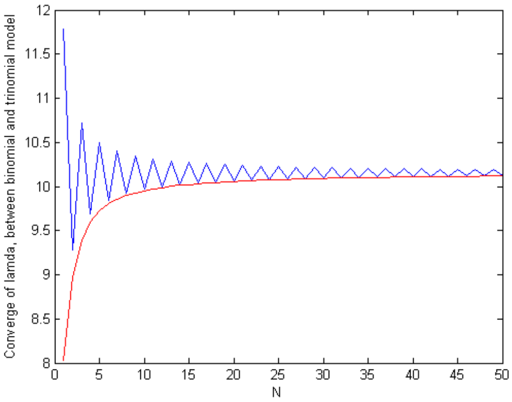
(β′) $\lambda = 1.22474$



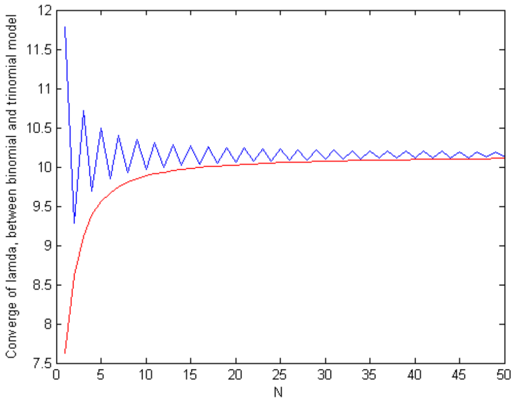
(γ′) $\lambda = 1.4$



(δ′) $\lambda = 1.6$



(ε′) $\lambda = 1.8$

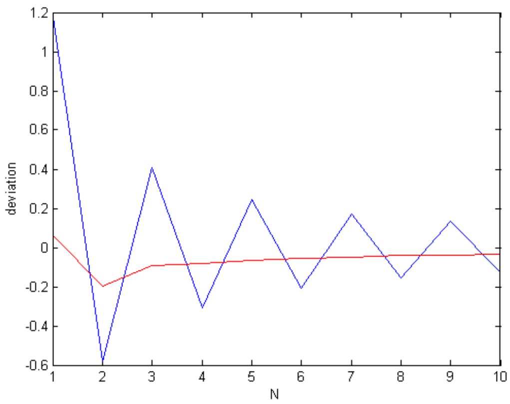


(ϛ′) $\lambda = 2$

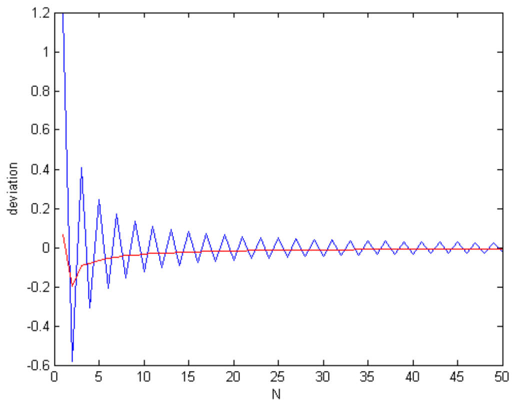
Σχήμα 4.1: Τιμές τριωνυμικού (για διάφορα λ) και διωνυμικού υποδείγματος. $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$. Εδώ B.S.=10.1592

4.1.3 Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από το Black-Scholes καθώς αυξάνεται το N

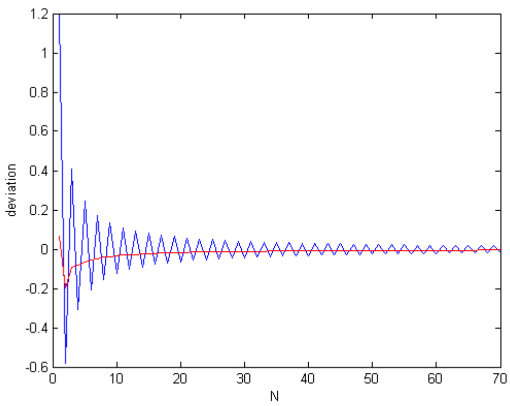
Προηγουμένως είδαμε τι συμβαίνει στα υποδείγματα καθώς αλλάζει το λ (για το τριωνυμικό) για έναν αριθμό επαναλήψεων μέχρι και την τιμή $N = 50$. Εδώ θα διατηρήσουμε σταθερό το λ (για το τριωνυμικό) και θα θεωρήσουμε τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις για το N. Θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή που πήραν οι Kamrad & Ritchken, για $\lambda = 1.22474$. Στο Σχήμα 4.2, βλέπουμε τις τιμές του διωνυμικού και του τριωνυμικού υποδείγματος και την απόστασή τους από την τιμή Black-Scholes. Παρατηρούμε πως οι τιμές του τριωνυμικού υποδείγματος προσεγγίζουν γρηγορότερα την τιμή του μοντέλου B.S. και η σύγκλιση αυτή φαίνεται βελτιώνεται καθώς ο αριθμός των N βημάτων αυξάνεται. Μάλιστα, το τριωνυμικό υπόδειγμα με περίπου δέκα με δεκαπέντε επαναλήψεις δίνει ένα αποτέλεσμα πολύ κοντά στην τιμή B.S., ενώ για να συγκρίνουμε το διωνυμικό με το τριωνυμικό, απαιτούνται τουλάχιστον τριάντα με τριανταπέντε επαναλήψεις. Παρατηρούμε επίσης πως καθώς το N μεγαλώνει, η σύγκλιση του διωνυμικού υποδείγματος διορθώνεται, όπως άλλωστε ήταν διαισθητικά αναμενόμενο.



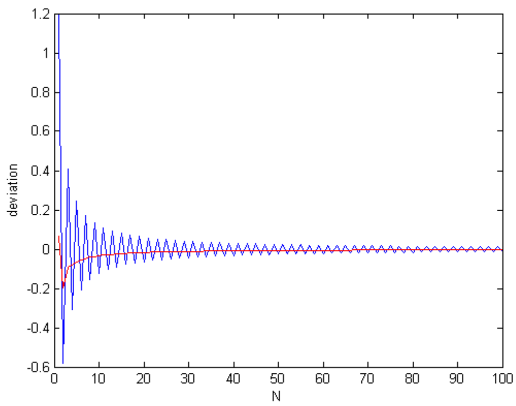
(α΄) $N = 10$



(β΄) $N = 50$



(γ΄) $N = 70$



(δ΄) $N = 100$

Σχήμα 4.2: Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από μοντέλο B.S., για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$, $\lambda = 1.22474$.

Στον Πίνακα 4.2, παραθέτουμε τις τιμές για το δικαίωμα που δίνει το διωνυμικό και το τριωνυμικό υπόδειγμα, για διαφορετικές τιμές του N και την απόστασή τους από την τιμή Black-Scholes. Πάλι καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα: Το τριωνυμικό υπόδειγμα πηγαίνει πιο γρήγορα στην τιμή B.S.

από το διωνυμικό.

Πίνακας 4.2: Τιμές διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος, για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$, $\lambda = 1.22474$, N μεταβλητό και απόσταση αυτών από μοντέλο B.S. Η τιμή του μοντέλου $B.S.$ είναι 6,1165

			ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ B.S.	
N	Δ.Υ.	Τ.Υ.	Δ.Υ.	Τ.Υ.
10	5,9910	6,0825	0,1256	0,0340
50	6,0911	6,1095	0,0254	0,0070
70	6,0983	6,1115	0,0182	0,0050
100	6,1038	6,1130	0,0127	0,0035
200	6,1101	6,1147	0,0064	0,0018
300	6,1123	6,1153	0,0042	0,0012
500	6,1140	6,1158	0,0045	0,0007

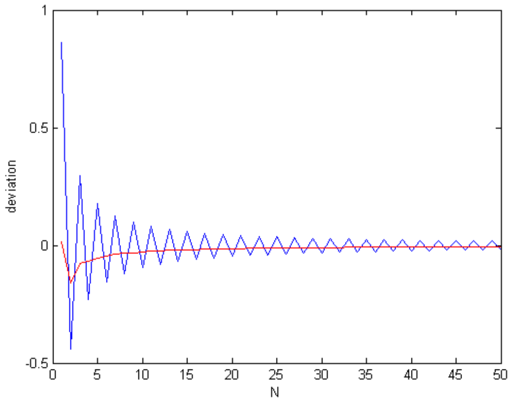
4.1.4 Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από το Black-Scholes καθώς μεταβάλλεται το σ

Στην παράγραφο αυτή θα διατηρήσουμε σταθερό το λ (για το τριωνυμικό υπόδειγμα) και θα αφήσουμε το σ να μεταβάλλεται. Ο στόχος μας είναι να εξετάσουμε την ευαισθησία των αποτελεσμάτων και των δύο υποδειγμάτων (διωνυμικό και τριωνυμικό) ως προς τη μεταβλητότητα των τιμών της υποκείμενης μετοχής. Πάλι θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή που πήραν οι Kamrad & Ritchken, για $\lambda = 1.22474$. Στον Πίνακα 4.3, παραθέτουμε τις τιμές των δικαιωμάτων του διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος και την απόστασή τους από την αντίστοιχη τιμή Black-Scholes [15] καθώς το σ αυξάνεται (τώρα για κάθε τιμή του σ το B.S. θα δίνει διαφορετική τιμή). Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως του επιπέδου του σ, η συμπεριφορά του υποδείγματος του τριωνυμικού και του διωνυμικού υποδείγματος δεν αλλάζει και είναι ίδια με αυτήν που είδαμε και προηγουμένως. Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως της τιμής του σ η τιμή του τριωνυμικού υποδείγματος είναι πιο κοντά στην τιμή του B.S. από ότι είναι η τιμή του διωνυμικού υποδείγματος.

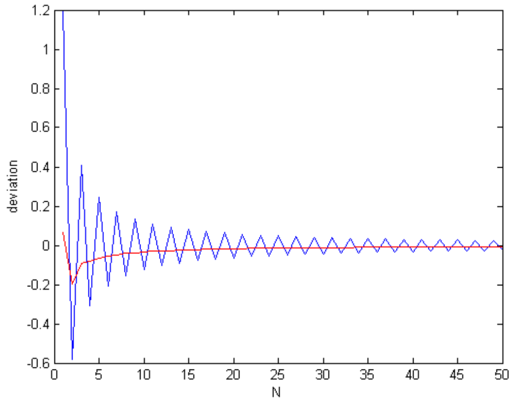
Πίνακας 4.3: Τιμές διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος, για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $T = 5/12$, $\lambda = 1.22474$, $N = 50$, σ μεταβλητό και απόσταση αυτών από μοντέλο B.S.

				ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ B.S.	
σ	Δ.Υ.	Τ.Υ.	B.S.	Δ.Υ.	Τ.Υ.
0,3	4,8659	4,8794	4,8851	0,0193	0,0057
0,4	6,0911	6,1095	6,1165	0,0254	0,0070
0,5	7,3198	7,3428	7,3513	0,0316	0,0085
0,6	8,5463	8,5736	8,5840	0,0377	0,0104

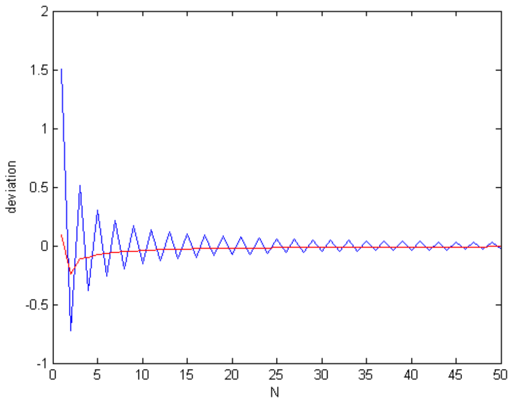
Τώρα, για να εξετάσουμε την ταχύτητα σύγκλισης των υποδειγμάτων θα αφήσουμε το N να παίρνει τιμές από το $N = 1$ μέχρι και το $N = 50$ και θα αφήσουμε πάλι το σ να μεταβάλλεται. Στο Σχήμα 4.3 βλέπουμε την απόσταση των τιμών των δύο υποδειγμάτων από την τιμή Black-Scholes. Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως του επιπέδου του σ, το τριωνυμικό υπόδειγμα πηγαίνει πιο γρήγορα και πιο ομαλά στην τιμή B.S. από ότι το διωνυμικό.



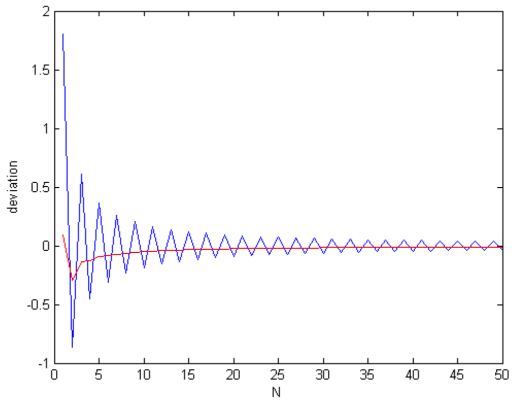
(α′) $\sigma = 0.3$



(β′) $\sigma = 0.4$



(γ′) $\sigma = 0.5$



(δ′) $\sigma = 0.6$

Σχήμα 4.3: Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από μοντέλο B.S. για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $T = 5/12$, $\lambda = 1.22474$ και σ μεταβλητό.

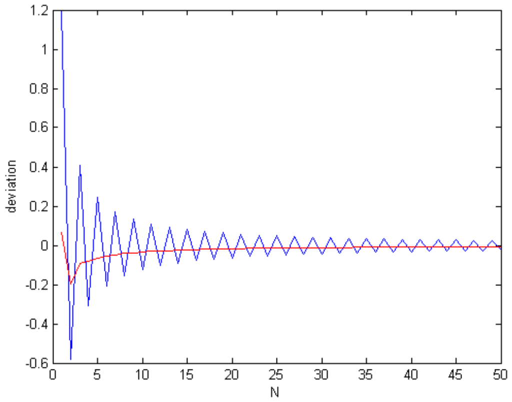
4.1.5 Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από το Black-Scholes καθώς μεταβάλλεται το r

Προηγουμένως είδαμε τι συμβαίνει στα υποδείγματα καθώς μεταβάλλεται το σ. Εδώ θα διατηρήσουμε σταθερό το σ και θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή που πήραν οι Kamrad & Ritchken, για $\lambda = 1.22474$ και θα αφήσουμε το r να μεταβάλλεται, ώστε να εξετάσουμε την ευαισθησία των αποτελεσμάτων ως προς το επιτόκιο δίχως κίνδυνο.

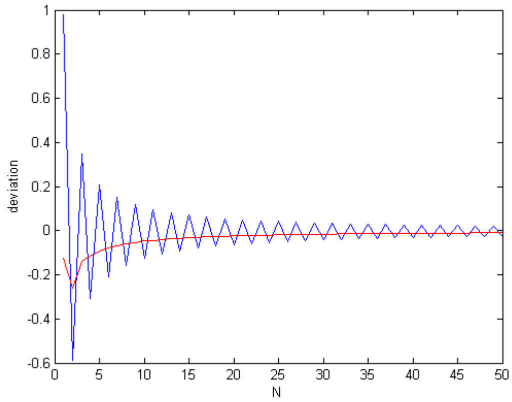
Πίνακας 4.4: Τιμές διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος, για $S_0 = 50$, $K = 50$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$, $\lambda = 1.22474$, $N = 50$, r μεταβλητό και απόσταση αυτών από μοντέλο B.S.

				ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ B.S.	
r	Δ.Υ.	Τ.Υ.	B.S.	Δ.Υ.	Τ.Υ.
0,1	6,0911	6,1095	6,1165	0,0254	0,0070
0,2	7,1569	7,1729	7,1826	0,0257	0,0097
0,3	8,2972	8,3087	8,3236	0,0264	0,0149
0,4	9,4996	9,5045	9,5267	0,0271	0,0222

Στον Πίνακα 4.4, παραθέτουμε τις τιμές των δικαιωμάτων του διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος και την απόστασή τους από την αντίστοιχη τιμή Black-Scholes καθώς το r αυξάνεται (τώρα για κάθε τιμή του r το B.S. θα δίνει διαφορετική τιμή). Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως του επιπέδου του r, η συμπεριφορά του υποδείγματος του τριωνυμικού και του διωνυμικού υποδείγματος δεν αλλάζει και είναι ίδια με αυτήν που είδαμε και προηγουμένως. Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως της τιμής του r η τιμή του τριωνυμικού υποδείγματος είναι πιο κοντά στην τιμή του B.S. από ότι είναι η τιμή του διωνυμικού υποδείγματος.



(α′) $r = 0.1$



(β′) $r = 0.2$

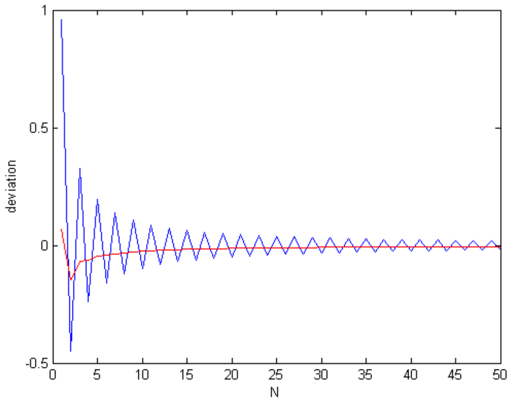
Για για να εξετάσουμε την ταχύτητα σύγκλισης των υποδειγμάτων θα αφήσουμε το N να παίρνει τιμές από το $N = 1$ μέχρι και το $N = 50$ και θα αφήσουμε πάλι το r να μεταβάλλεται. Στο πιο πάνω σχήμα Σχήμα (για το συγκεκριμένο λ που πρότειναν οι Kamrad & Ritchken [24]), παρατηρούμε την απόσταση των τιμών των δύο υποδειγμάτων από την τιμή Black-Scholes. Βλέπουμε πως ανεξαρτήτως του επιπέδου του r, η συμπεριφορά του υποδείγματος του τριωνυμικού και του διωνυμικού υποδείγματος δεν αλλάζει όπως είδαμε και προηγουμένως. Παρατηρούμε πως το τριωνυμικό υπόδειγμα προσεγγίζει γρηγορότερα και πιο ομαλά την τιμή του μοντέλου Black-Scholes από ότι το διωνυμικό.

4.1.6 Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από το Black-Scholes καθώς μεταβάλλεται το T

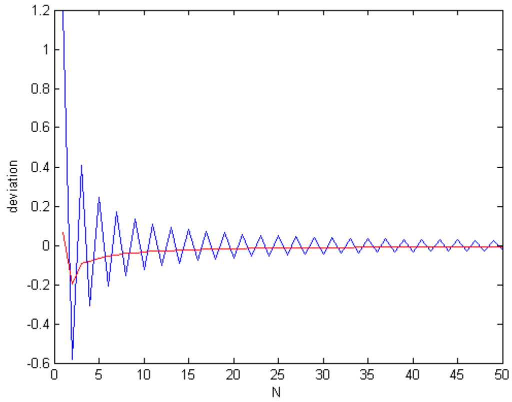
Προηγουμένως είδαμε τι συμβαίνει στα υποδείγματα καθώς μεταβάλλεται το σ και το r. Εδώ θα διατηρήσουμε σταθερό το σ και το r (θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή που πήραν οι Kamrad & Ritchken, για $\lambda = 1.22474$) και θα αφήσουμε το T να μεταβάλλεται, ώστε να εξετάσουμε την ευαισθησία των αποτελεσμάτων ως προς το χρόνο λήξης του δικαιώματος.

Πίνακας 4.5: Τιμές διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος, για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $\lambda = 1.22474$, $N = 50$, T μεταβλητό και απόσταση αυτών από μοντέλο B.S.

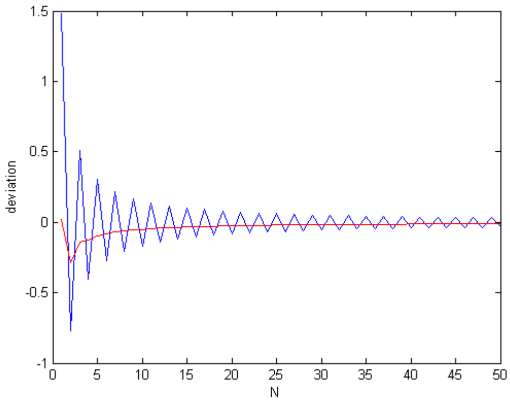
				ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ B.S.	
T	Δ.Υ.	Τ.Υ.	B.S.	Δ.Υ.	Τ.Υ.
3/12	4,5617	4,5763	4,5815	0,0198	0,0052
5/12	6,0911	6,1095	6,1165	0,0254	0,0070
9/12	8,5528	8,5767	8,5866	0,0338	0,0103
1	10,1205	10,1464	10,1592	0,0387	0,0128



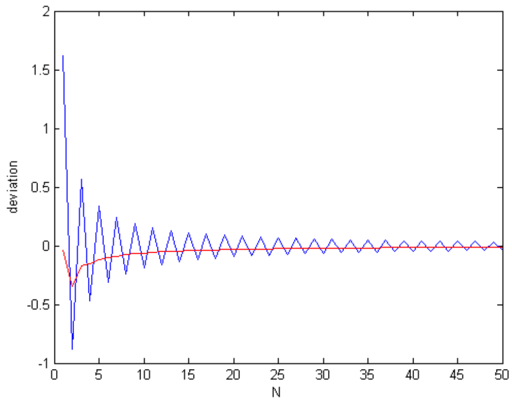
(α') $T = 3/12$



(β') $T = 5/12$



(γ') $T = 9/12$



(δ') $T = 1$

Σχήμα 4.5: Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από μοντέλο B.S. για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $\lambda = 1.22474$, και T μεταβλητό.

Στον Πίνακα 4.5, παραθέτουμε τις τιμές των δικαιωμάτων του διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος και την απόστασή τους από την αντίστοιχη τιμή Black-Scholes καθώς το T αυξάνεται (τώρα για κάθε τιμή του T το B.S. θα δίνει διαφορετική τιμή). Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως του επιπέδου του T, η συμπεριφορά του τριωνυμικού και του διωνυμικού υποδείγματος δεν αλλάζει και είναι ίδια με αυτήν που είδαμε και προηγουμένως. Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως της τιμής του T η τιμή του τριωνυμικού υποδείγματος είναι πιο κοντά στην τιμή του B.S. από ότι είναι η τιμή του διωνυμικού υποδείγματος. Για για να εξετάσουμε την ταχύτητα σύγκλισης των υποδειγμάτων θα αφήσουμε το N να παίρνει τιμές από το $N = 1$ μέχρι και το $N = 50$ και θα αφήσουμε πάλι το T να μεταβάλλεται. Στο Σχήμα 4.5 (για το συγκεκριμένο λ που πρότειναν οι Kamrad & Ritchken [24]), παρατηρούμε την απόσταση των τιμών των δύο υποδειγμάτων από την τιμή Black-Scholes. Βλέπουμε πως ανεξαρτήτως του επιπέδου του T, η συμπεριφορά του υποδείγματος του τριωνυμικού και του διωνυμικού υποδείγματος δεν αλλάζει όπως είδαμε και προηγουμένως: Το τριωνυμικό υπόδειγμα προσεγγίζει γρηγορότερα και πιο ομαλά την τιμή του μοντέλου Black-Scholes από ότι το διωνυμικό.

4.1.7 Διαφορά διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος καθώς μεταβάλλεται το N

Έχουμε ισχυριστεί πως για $\lambda = 1$ καθώς το N αυξάνει, η απόσταση μεταξύ διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος πηγαίνει στο μηδέν. Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε το θέμα αυτό. Πιο συγκεκριμένα, στον Πίνακα 4.6 παραθέτουμε τις τιμές για το δικαίωμα με βάση το διωνυμικό και το τριωνυμικό υπόδειγμα και την μεταξύ τους απόσταση, για $\lambda = 1$, καθώς το N αυξάνει. Παρατηρούμε πως καθώς αυξάνει ο αριθμός των περιόδων N, η απόσταση μεταξύ διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος γίνεται πολύ μικρή. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού από την Εξίσωση 3.8 βλέπουμε πως στην περίπτωση αυτή το $P_m = 0$, ενώ τα P_u και P_d είναι τα ίδια ακριβώς με αυτά του διωνυμικού υποδείγματος. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε πως καθώς το N μεγαλώνει, το $\delta t = T/N$ μικραίνει. Από τις σειρές Taylor γνωρίζουμε πως το e^x για x μικρό συμπεριφέρεται σαν το $1 + x$. Με τον τρόπο αυτό, για $\lambda = 1$, οι εκφράσεις για τα P_u & P_d στις εξισώσεις 3.7 θα οδηγήσουν στις αντίστοιχες εκφράσεις για τις πιθανότητες P_u & P_d του διωνυμικού υποδείγματος στις Εξισώσεις 2.1.

Πίνακας 4.6: Τιμές διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος, για $\lambda = 1$ (σταθερό), $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$, N μεταβλητό.

Eu Call N	Δ.Υ.	Τ.Υ.	Διαφορά Δ.Υ. με Τ.Υ
10	9.9680	9.8826	0.0853
50	10.1205	10.1066	0.0138
100	10.1399	10.1331	0.0067
150	10.1463	10.1418	0.0044
300	10.1528	10.1524	0.0003

Παρατήρηση 10. Στο παράρτημα Α′ παραθέτουμε τα αποτελέσματα της αριθμητικής ανάλυσης για την περίπτωση που έχουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης. Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά της Παραγράφου 7.1.8. Για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης, το τριωνυμικό υπόδειγμα (για $\lambda = 1.22474$) συγκλίνει πιο γρήγορα και πιο ομαλά από ότι το διωνυμικό στην τιμή του μοντέλου Black-Scholes. Επομένως δεν θα σχολιάσουμε περαιτέρω τα σχήματα και τους πίνακες καθώς τα συμπεράσματα για την περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης είναι ακριβώς ίδια με αυτά του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4.

4.1.8 Συμπεράσματα

Με βάση την παραπάνω ανάλυση καταλήγουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα για την περίπτωση ενός δικαιώματος προαίρεσης αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου:

- Τόσο το διωνυμικό όσο και το τριωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης κρίνονται αποτελεσματικά καθώς και τα δύο συγκλίνουν στην τιμή του υποδείγματος Black-Scholes, με κύρια διαφορά στον χρόνο σύγκλισης και την διακύμανση στις τιμές τους.

- Ανεξαρτήτως της τιμής των διαφόρων παραμέτρων (σ, r, T, N), βλέπουμε ότι το τριωνυμικό υπόδειγμα (για $\lambda = 1.22474$) συγκλίνει γρηγορότερα και πιο ομαλά από το διωνυμικό στην τιμή που δίνει το υπόδειγμα Black-Scholes.

- Για $\lambda = 1$, καθώς το N μεγαλώνει το διωνυμικό και το τριωνυμικό υπόδειγμα συμπίπτουν.

- Για μία τιμή λ κοντά στο 1.2, φαίνεται οπτικά τουλάχιστον πως το τριωνυμικό υπόδειγμα δίνει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Αυτό βέβαια είναι κάτι που πρέπει να επαληθευθεί και μαθηματικά και αποτελεί ανοιχτό ερώτημα για μια μελλοντική εργασία.

4.2 Βασικά σημεία κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό κάναμε αριθμητική μελέτη του διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης. Συγκρίναμε τα αποτελέσματά τους ως προς την τιμή του υποδείγματος Black-Scholes. Πιο συγκεκριμένα, εξετάσαμε:

- την συμπεριφορά, συμπεριλαμβανομένης και της ταχύτητας σύγκλισης, τόσο του διωνυμικού όσο και του τριωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης, σε ένα πεδίο Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων.
- την συμπεριφορά (ευαισθησία) των υποδειγμάτων αυτών συναρτήσει των διαφόρων υποκείμενων παραμέτρων τους (σ, r, T, N, λ).

καταλήξαμε σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα για την συμεριφορά των υποδειγμάτων.

Μέρος II

Δικαιώματα σε δύο μετοχές

5

Το υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε δύο από τα πιο σημαντικά υποδείγματα τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης, το λεγόμενο διωνυμικό και τριωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης. Οι προσεγγίσεις στις οποίες βασιστήκαμε είναι αυτές των Cox Ross & Rubinstein [19] και Kamrad & Ritchken [24] αντίστοιχα για κάθε υπόδειγμα και πρακτικά δεν είναι τίποτα άλλο παρά χρηματοοικονομικά υποδείγματα σε διακριτό χρόνο σύμφωνα με τα οποία μπορούμε να τιμολογήσουμε Ευρωπαϊκά, αλλά κυρίως Αμερικάνικα δικαιώματα προαίρεσης (αγοράς και πώλησης). Τα υποδείγματα αυτά χρησιμοποιούνται με επιτυχία στην πράξη ακόμη και σήμερα. Χαρακτηριστικό όμως είναι πως πρόκειται για υποδείγματα τιμολόγησης δικαιωμάτων τα οποία είναι γραμμένα σε ένα μόνο υποκείμενο στοιχείο (π.χ. μετοχή).

Τι συμβαίνει όμως αν ο υποκείμενος τίτλος είναι γραμμένος σε παραπάνω από μία μετοχές;

Στην πράξη είναι συχνό το φαινόμενο ένας επενδυτής να ενδιαφέρεται για παραπάνω από μία μετοχές και όχι απαραίτητα ίδιες, αλλά διαφορετικές μεταξύ τους (π.χ. για λόγους αντιστάθμισης του χρηματοοικονομικού κινδύνου) και μάλιστα μετοχές οι αποδόσεις των οποίων παρουσιάζουν αρνητική ή μηδενική συσχέτιση, ώστε να μην εξαρτάται η τιμή της μιας από την τιμή της άλλης ($\rho \in [-1, 1]$.) * Εδώ γεννιέται το ερώτημα: Με ποιον τρόπο μπορούμε να τιμολογήσουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης γραμμένο σε παραπάνω από μία μετοχές;

Μία ιδέα θα ήταν να ακολουθήσουμε τις τεχνικές προσομοίωσης Monte-Carlo (για περισσότερες πληροφορίες βλ. Κεφάλαιο 4 στον Brandimarte [14]) ή Κεφάλαιο 4 σους Clewlow & Strickland [25]. Αυτό προϋποθέτει πρακτικά ότι θα υιοθετήσουμε ένα μαθηματικό υπόδειγμα σύμφωνα με το οποίο εξελίσσονται οι τιμές των μετοχών αυτών στον χρόνο και θα γεννήσουμε πάρα πολλά σενάρια για τις τελικές τιμές των μετοχών (έστω ότι το δικαίωμα είναι Ευρωπαϊκού τύπου) και κατόπιν βαδίζοντας με βάση το πλαίσιο της ουδετερότητας ως προς τον κίνδυνο, θα υπολογίζαμε την μέση τιμή των τελικών τιμών των μετοχών και θα προεξοφλούσαμε. Η τιμή αυτή, θα αποτελεί και την τιμή του δικαιώματος. Αυτό ενδέχεται να είναι πολύ βαρύ υπολογιστικά καθώς στην πράξη συνήθως απαιτείται να προσομοιώσουμε έναν τεράστιο αριθμό διαφορετικών μονοπατιών της στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει την εξέλιξη των τιμών των υποκείμενων μετοχών.

Στο κεφάλαιο αυτό (αλλά και στο επόμενο) θα εξετάσουμε μία εναλλακτική μέθοδο για την τιμολόγηση τέτοιων δικαιωμάτων που πρακτικά δεν είναι τίποτα άλλο παρά μία άμεση επέκταση του διωνυμικού υποδείγματος που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια επέκταση του διωνυμικού υποδείγματος σύμφωνα με τους Boyle, Evnine & Gibbs (1989) [13], ενώ στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια επέκταση του τριωνυμικού υποδείγματος σύμφωνα με τους Kamrad & Ritchken [24]. Οι Boyle, Evnine & Gibbs

*Αν $\rho = 1$, οι μετοχές είναι τέλεια συσχετισμένες και δεν μπορούμε να κάνουμε λόγο για αντιστάθμιση, αφού αν πέσει η τιμή της μιας μετοχής, αυτό θα οδηγήσει σε απώλειες για το χαρτοφυλάκιο. Αν $\rho = 0$, οι τιμές των μετοχών είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Τέλος, αν $\rho = -1$, είναι τέλεια αρνητικά συσχετισμέμες, οπότε η κίνηση της μιας δεν επηρεάζει καθόλου την κίνηση της άλλης.

[13], έχοντας ως βάση το υπόδειγμα των Cox, Ross & Rubinstein [19] που είδαμε στο Κεφάλαιο 2 (για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος γραμμένου πάνω σε έναν υποκείμενο τίτλο), ανέπτυξαν μια επέκταση της παραπάνω διαδικασίας για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης στην περίπτωση $k > 1$ υποκείμενων στοιχείων (μετοχών), μέσω του οποίο μπορούν να τιμολογηθούν Ευρωπαϊκά, αλλά κυρίως Αμερικάνικα δικαιώματα προαίρεσης (αγοράς και πώλησης). Η φιλοσοφία του υποδείγματος αυτού, που είναι γνωστό ως υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων (μιας και σε κάθε χρονική περίοδο από κάθε έναν κόμβο ξεκινούν τέσσερις νέες τιμές), είναι ίδια με την φιλοσοφία του διωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης και πηγάζει από την υπόθεση πως οι μετοχές εξελίσσονται από κοινού βάσει του υποδείγματος της γεωμετρικής κίνησης Brown. Ο στόχος μας είναι να προσεγγίσουμε την συνεχή κατανομή των λογαριθμικών αποδόσεων (που ειναι κανονική) με μία διακριτή κατανομή τεσσάρων αλμάτων.

5.1 Υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων σε μία περίοδο

Στην παράγραφο αυτή, θεωρούμε ότι έχουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης (έστω Ευρωπαϊκού τύπου) γραμμένο σε δύο μετοχές οι αποδόσεις των οποίων εμφανίζουν συσχέτιση. Ο στόχος μας είναι να κάνουμε τιμολόγηση του δικαιώματος αυτού με το υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων των Boyle, Evnine & Gibbs [13]. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η βασική ιδέα του υποδείγματος τεσσάρων αλμάτων δεν είναι διαφορετική από αυτή του υποδείγματος των Cox, Ross & Rubinstein [19]. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, γραμμένο σε δύο μετοχές. Θεωρούμε πως έχουμε δύο μετοχές, τις S_1 και S_2 με αντίστοιχες τιμές S_t^1 και S_t^2, την χρονική στιγμή t. Για τις μετοχές S_1 και S_2 θεωρούμε τα ακόλουθα τέσσερα πιθανά σενάρια μετά από ένα χρονικό βήμα:

Πίνακας 5.1: Διαφορετικά σενάρια για την εξέλιξη των δύο μετοχών στο υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων

S_1	S_2	**Σενάρια** ω
$\uparrow$	$\uparrow$	ω_1
$\uparrow$	$\downarrow$	ω_2
$\downarrow$	$\uparrow$	ω_3
$\downarrow$	$\downarrow$	ω_4

- Να ανέβει η τιμή της μετοχής S_1 και να ανέβει και της S_2.
- Να ανέβει η τιμή της μετοχής S_1 και να πέσει της S_2.
- Να πέσει η τιμή της μετοχής S_1 και να ανέβει της S_2
- Να πέσουν οι τιμές και των δύο μετοχών.

Η βασική ιδέα για να επεκταθεί το διωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 2, στην περίπτωση που έχουμε ένα δικαίωμα γραμμένο σε δύο υποκείμενες μετοχές, είναι η εξής: Υποθέτωντας ότι οι μετοχές εξελίσσονται στον χρόνο με βάση το υπόδειγμα της γεωμετρικής κίνησης Brown, θα κατασκευάσουμε μία διακριτή κατανομή πιθανότητας τεσσάρων αλμάτων (ένα για κάθε ένα σενάριο που παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.1) για να προσεγγίσουμε την διδιάστατη τώρα λογαριθμική κατανομή. Αυτή την προσέγγιση άλλωστε ακολουθήσαμε και στην (μονοδιάστατη) περίπτωση του τριωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης, μόνο που στην περίπτωση αυτή θεωρήσαμε μια διακριτή κατανομή τριών αλμάτων αντί για τέσσερα που θεωρούμε τώρα. Πιο αναλυτικά, έστω ότι οι μετοχές S_1 και S_2 εξελίσσονται στον χρόνο με βάση το υπόδειγμα της γεωμετρικής κίνησης Brown, δηλαδή με βάση τον μαθηματικό κανόνα:

$$dS_t^i = rS_t^i dt + \sigma_i S_t^i dW_t^i, \tag{5.1}$$

για $i = 1, 2$, η οποία σχέση μας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο συνδέεται η μεταβολή της τιμής της κάθε μετοχής στο χρονικό διάστημα $[t, t + \delta t]$ (δηλαδή το dS_t^i), με την τιμή της κάθε μετοχής την χρονική στιγμή t (δηλαδή το S_t^i). Με $r > 0$ συμβολίζουμε το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, σ_i είναι η μεταβλητότητα των τιμών της κάθε μετοχής και $(W_t^i, t \geq 0)$, ορίζουμε την κάθε μία τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown, για κάθε μετοχή, όπου $i = 1, 2$ αντίστοιχα για κάθε μετοχή με συντελεστή συσχέτισης $\rho \in [-1, 1]$. Θέτοντας ως S_t^1 την αρχική τιμή της πρώτης μετοχής την χρονική στιγμή t και S_t^2 την αρχική τιμή της δεύτερης μετοχής την χρονική στιγμή t. Η λύση της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (βλ. εξίσωση 2.11) μπορεί να δώσει την μεταβολή της τιμής της μετοχής από τον χρόνο t στον χρόνο $t + \delta t$, ως εξής:

$$S_{t+\delta t}^1 = S_t^1 \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\delta t + \sigma_1 \delta W_t^1\right], \tag{5.2}$$

για την πρώτη μετοχή και:

$$S_{t+\delta t}^2 = S_t^2 \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\delta t + \sigma_2 \delta W_t^2\right], \tag{5.3}$$

για την δεύτερη μετοχή. Λογαριθμίζοντας την εξίσωση 5.2, έχουμε :

$$\ln\left(\frac{S_{t+\delta t}^1}{S_t^1}\right) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\delta t + \sigma_1 \delta W_t^1 := \nu_1(t), \tag{5.4}$$

Ομοίως λογαριθμίζοντας την εξίσωση 5.3, έχουμε :

$$\ln\left(\frac{S_{t+\delta t}^2}{S_t^2}\right) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\delta t + \sigma_2 \delta W_t^2 := \nu_2(t), \tag{5.5}$$

όπου ν_t^1 και ν_t^2 αποτελούν δύο τυχαίες μεταβλητές κανονικά κατανεμημένες, όπου $\nu_i(t)$, μια τυχαία μεταβλητή κανονικά κατανεμημένη, με μέση τιμή $\mu_i \delta t$ όπου $\mu_i = r - (0,5)\sigma_i^2$ και διακύμανση $\sigma_i^2 \delta t$, για $i = 1, 2$ αντίστοιχα για κάθε μετοχή. Επιπλέον η συνδιακύμανση των $\nu_1(t)$ και $\nu_2(t)$ είναι $\rho\sigma_1\sigma_2\delta t$. Ισοδύναμα οι σχέσεις 5.4, 5.5 μπορούν να γραφούν ως:

$$\ln[S_{t+\delta t}^i] = \ln[S_t^i] + \nu_i(t).$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η βασική φιλοσοφία είναι να προσεγγίσουμε την από κοινού κατανομή των $\nu_i(t)$ με ένα ζεύγος διακριτών τυχαίων μεταβλητών, τις οποίες συμβολίζουμε με $\nu_1^a(t)$ και $\nu_2^a(t)$ στο διάστημα $[t, t + \delta t]$ που ακολουθούν την παρακάτω κατανομή:
Το υ μας οδηγεί στην παράμετρο ανοδικού βήματος ενώ το $-\upsilon$ στην παράμετρο καθοδικού βήματος. Ο βασικός στόχος της προσέγγισης αυτής είναι να υπολογίσουμε τις πιθανότητες P_1, P_2, P_3 και P_4.

Παρατήρηση 11. Οι Boyle, Evnine & Gibbs [13], όρισαν την παράμετρο ανοδικής και καθοδικής κίνησης για κάθε μετοχή με παρόμοιο τρόπο με αυτόν του διωνυμικού υποδείγματος των Cox, Ross & Rubinstein [19], συγκεκριμένα ως $u_i = e^{\upsilon_i}$ και $d_i = e^{-\upsilon_i}$, όπου $\upsilon_i = \sigma_i\sqrt{\delta t}$, για $i = 1, 2$. Επομένως, ισχύει και εδώ ότι $u_i d_i = 1$, δηλαδή ένα πλαίσιο συνδιαστικών δένδρων τιμολόγησης (recombining lattice framework), κάτι το οποίο υποθέσαμε και στα δύο προηγούμενα κεφάλαια.

Πίνακας 5.2: Διακριτή τυχαία μεταβλητή για το υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων

$\nu_1^a(t)$	$\nu_2^a(t)$	**Πιθανότητα**	**Σενάρια του κόσμου**
υ_1	υ_2	P_1	ω_1
υ_1	$-\upsilon_2$	P_2	ω_2
$-\upsilon_1$	υ_2	P_3	ω_3
$-\upsilon_1$	$-\upsilon_2$	P_4	ω_4

Ο βασικός στόχος της προσέγγισης αυτής είναι να υπολογίσουμε τις πιθανότητες P_1, P_2, P_3 και P_4. Για να φέρουμε εις πέρας τον παραπάνω στόχο, θα εξισώσουμε την μέση τιμή, την διακύμανση και την συνδιακύμανση της συνεχούς με της διακριτής κατανομής (γιατί τώρα οι τυχαίες μεταβλητές εμφανίζουν μεταξύ τους συσχέτιση). Η συνεχής τυχαία μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_i \delta t$, και διακύμανση $\sigma_i^2 \delta t$. Η (στιγμιαία) συνδιακύμανση είναι $\rho\sigma_1\sigma_2\delta t$. Ξεκινάμε με την τυχαία μεταβλητή $\nu_1^a(t)$:

$$\begin{aligned} E(\nu_1^a(t)) &= P_1\upsilon_1 + P_2\upsilon_1 - P_3\upsilon_1 - P_4\upsilon_1 \\ &= \upsilon_1(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\nu_1^a(t)) &= E[\nu_1^a(t)^2] - [E(\nu_1^a(t))]^2 \\ &= P_1\upsilon_1^2 + P_2\upsilon_1^2 + P_3\upsilon_1^2 + P_4\upsilon_1^2 - [\upsilon_1(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)]^2 \\ &= \upsilon_1^2(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) - [\upsilon_1(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)]^2 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια για την τυχαία μεταβλητή $\nu_2^a(t)$, υπολογίζουμε τις δύο πρώτες ροπές:

$$\begin{aligned} E\left(\nu_2^a(t)\right) &= P_1\upsilon_2 - P_2\upsilon_2 + P_3\upsilon_2 - P_4\upsilon_2 \\ &= \upsilon_2(P_1 - P_2 + P_3 - P_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\nu_2^a(t)) &= E[\nu_2^a(t)^2] - [E(\nu_2^a(t))]^2 \\ &= P_1\upsilon_2^2 + P_2\upsilon_2^2 + P_3\upsilon_2^2 + P_4\upsilon_2^2 - [\upsilon_2(P_1 - P_2 + P_3 - P_4)]^2 \\ &= \upsilon_2^2(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) - [\upsilon_2(P_1 - P_2 + P_3 - P_4)]^2 \end{aligned}$$

Η συνδιακύμανση των δύο αυτών τυχαίων μεταβλητών είναι η εξής:

$$\begin{aligned} Cov(\nu_1^a(t), \nu_2^a(t)) &= E[\nu_1^a(t)\nu_2^a(t)] - E(\nu_1^a(t))E(\nu_1^a(t)) \\ &= P_1\upsilon_1\upsilon_2 + P_2\upsilon_1(-\upsilon_2) + P_3(-\upsilon_1)\upsilon_2 + P_4(-\upsilon_1)(-\upsilon_2) \\ &- [\upsilon_1(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)][\upsilon_2(P_1 - P_2 + P_3 - P_4)] \\ &= \upsilon_1\upsilon_2(P_1 - P_2 - P_3 + P_4) \\ &- [\upsilon_1(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)][\upsilon_2(P_1 - P_2 + P_3 - P_4)]. \end{aligned}$$

- Απαιτούμε για την περίπτωση της μετοχής S_1 η μέση τιμή της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής να ισούται με αυτή της διακριτής:

$$\upsilon_1(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) = \mu_1\delta t. \tag{5.6}$$

- Απαιτούμε για την περίπτωση της μετοχής S_2 η μέση τιμή της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής να ισούται με αυτή της διακριτής:

$$\upsilon_2(P_1 - P_2 + P_3 - P_4) = \mu_2\delta t. \tag{5.7}$$

- Απαιτούμε επίσης για την μετοχή S_1 η διακύμανση της κανονικής κατανομής να ισούται με αυτή της διακριτής:

$$\upsilon_1(P_1+P_2-P_3-P_4)-[\upsilon_1(P_1+P_2-P_3-P_4)]^2=\sigma_1^2\delta t.$$

Παρατηρούμε πως $\upsilon_1(P_1+P_2-P_3-P_4)=\mu_1\delta t$, επομένως και $[\upsilon_1(P_1+P_2-P_3-P_4)]^2 = \mu_1^2\delta t^2=0$, εφόσον το δt είναι κάτι πολύ μικρό, το $(\delta t)^2$ αποτελεί μία ποσότητα αμελητέα, επομένως μπορεί να παραληφθεί. Έτσι,

$$\upsilon_1^2(P_1+P_2+P_3+P_4)=\sigma_1^2\delta t \tag{5.8}$$

- Απαιτούμε για την περίπτωση των μετοχών S_1 και S_2 η διακύμανση της κανονικής κατανομής να ισούται με αυτή της διακριτής:

$$\upsilon_2^2(P_1+P_2+P_3+P_4)-[\upsilon_2(P_1-P_2+P_3-P_4)]^2=\sigma_2^2\delta t.$$

Παρατηρούμε πως $\upsilon_2(P_1-P_2+P_3-P_4)=\mu_2\delta t$, επομένως και $[\upsilon_2(P_1-P_2+P_3-P_4)]^2 = \mu_2^2\delta t^2=0$, εφόσον το δt είναι κάτι πολύ μικρό, το $(\delta t)^2$ αποτελεί μία ποσότητα αμελητέα, επομένως μπορεί να παραληφθεί. Έτσι,

$$\upsilon_2^2(P_1+P_2+P_3+P_4)=\sigma_2^2\delta t \tag{5.9}$$

- Απαιτούμε τέλος για την μετοχή S_1 η διακύμανση της κανονικής κατανομής να ισούται με αυτή της διακριτής:

$$\begin{aligned}&\upsilon_1\upsilon_2^1(P_1+P_2+P_3+P_4)\\&-[\upsilon_1(P_1+P_2-P_3-P_4)][\upsilon_2(P_1-P_2+P_3-P_4)]=\rho\sigma_1\sigma_2\delta t.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως $\upsilon_1(P_1+P_2-P_3-P_4)=\mu_1\delta t$ και πως $\upsilon_2(P_1-P_2+P_3-P_4)=\mu_2\delta t$, επομένως και $[\upsilon_1(P_1+P_2-P_3-P_4)][\upsilon_2(P_1-P_2+P_3-P_4)]=\mu_1\delta t\mu_2\delta t=\mu_1\mu_2(\delta t^2)$, εφόσον το δt είναι κάτι πολύ μικρό, το $(\delta t)^2$ αποτελεί μία ποσότητα αμελητέα, επομένως μπορεί να παραληφθεί. Έτσι,

$$\upsilon_1\upsilon_2(P_1-P_2-P_3+P_4)=\rho\sigma_1\sigma_2\delta t. \tag{5.10}$$

Καταλήγουμε έτσι στο σύστημα 5.11 το οποίο αποτελείται από τις εξισώσεις 5.6, 5.7, 5.10 και το άθροισμα των πιθανοτήτων $(P_1+P_2+P_3+P_4)$, έχουμε τέσσερις αγνώστους και είναι το εξής:

$$\begin{aligned}\upsilon_1\,(P_1+P_2-P_3-P_4)&=\mu_1\delta t\\ \upsilon_2\,(P_1-P_2+P_3-P_4)&=\mu_2\delta t\\ \upsilon_1\upsilon_2\,(P_1-P_2-P_3+P_4)&=\rho\sigma_1\sigma_2\delta t\\ (P_1+P_2+P_3+P_4)&=1\end{aligned} \tag{5.11}$$

Αρχικά αντικαθιστούμε το $\upsilon = \sigma_i\sqrt{dt}$ στις εξισώσεις του συστήματος 5.11 και έτσι το σύστημα που προκύπτει 5.12 έχει την εξής απλοποιημένη μορφή:

$$\begin{aligned}
P_1 + P_2 - P_3 - P_4 &= \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)\sqrt{\delta t} \\
P_1 - P_2 + P_3 - P_4 &= \left(\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)\sqrt{\delta t} \\
P_1 - P_2 - P_3 + P_4 &= \rho \\
P_1 + P_2 + P_3 + P_4 &= 1
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Λύνοντας το σύστημα 5.12, προκύπτουν οι τιμές των τεσσάρων πιθανοτήτων, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στην επίλυση του υποδείγματος τεσσάρων αλμάτων. Ενδεικτικά, λύνοντας ως προς P_3 την πρώτη εξίσωση του συστήματος, ως προς P_4 την δεύτερη και ως προς P_2 την τρίτη:

$$\begin{aligned}
P_1 + P_2 - \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)\sqrt{\delta t} - P_4 &= P_3 \\
P_1 - P_2 + P_3 - \left(\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)\sqrt{\delta t} &= P_4 \\
P_1 - P_3 + P_4 - \rho &= P_2 \\
P_1 + P_2 + P_3 + P_4 &= 1
\end{aligned} \tag{5.13}$$

και αντικαθιστώντας τις εξισώσεις αυτές στην τέταρτη εξίσωση του συστήματος:

$$\begin{aligned}
P_1 + (P_1 - P_3 + P_4 - \rho) + \left[P_1 + P_2 - \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)\sqrt{\delta t} - P_4\right] \\
+ \left[P_1 - P_2 + P_3 - \left(\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)\sqrt{\delta t}\right] = 1
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε πως:

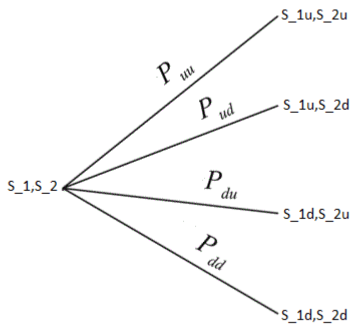
$$P_1 = 0.25\left[1 + \rho + \sqrt{\delta t}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]$$

Ακολουθώντας παρόμοιο μοτίβο, από το παραπάνω σύστημα προκύπτουν και οι τέσσερις παράμετροι, οι οποίοι χρησιμεύουν ως πιθανότητες και είναι σημαντικές για το μοντέλο μας και αυτές είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 0.25\left[1 + \rho + \sqrt{\delta t}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)\right] \\
P_2 &= 0.25\left[1 - \rho + \sqrt{\delta t}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)\right] \\
P_3 &= 0.25\left[1 - \rho + \sqrt{\delta t}\left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)\right] \\
P_4 &= 0.25\left[1 + \rho + \sqrt{\delta t}\left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)\right].
\end{aligned}$$

5.2 Αλγοριθμική φιλοσοφία υποδείγματος τεσσάρων αλμάτων

Παραπάνω παρουσιάσαμε τι συμβαίνει σε ένα διάστημα μήκους δt. Όπως είπαμε μας ενδιαφέρει να κατασκευάσουμε ένα δένδρο όπου σε κάθε κόμβο να έχουμε τέσσερις πιθανές καταστάσεις για την επόμενη χρονική στιγμή. Για να πετύχουμε τον στόχο αυτό θα ακολουθήσουμε μια αλγοριθμική διαδικασία παρόμοια με αυτή που ακολουθήσαμε στα δύο προηγούμενα κεφάλαια. Στο σημείο αυτό για να γίνει πιο κατανοητή η διαδικασία αυτή, θα παρουσιάσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Θεωρούμε ένα δικαίωμα προαίρεσης αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου (European spread), γραμμένο σε δύο μετοχές με απόδοση $[max(S_1(T) - S_2(T) - K), 0]$. Το δικαίωμα αυτό δεν μπορεί να εξασκηθεί πριν το χρόνο λήξης $t = T$. Μένει να δούμε πώς θα γίνει ο υπολογισμός της τιμής του δικαιώματος την χρονική στιγμή $t = 0$. Όπως είπαμε, θεωρούμε ένα χρονικό διάστημα μήκους $\delta t > 0$, μεταξύ των χρονικών στιγμών $t = 0$ και $t_1 = T > 0$. Για απλότητα συμβολίζουμε την αρχική τιμή της πρώτης μετοχής με S_1, με $S_1 > 0$ την χρονική στιγμή $t = 0$, και την αρχική τιμή της δεύτερης μετοχής με S_2, με $S_2 > 0$ την χρονική στιγμή $t = 0$. Αρχικά η τιμή των μετοχών μας είναι γνωστή από την παρατήρησή τους στην χρηματιστηριακή αγορά, ενώ στη συνέχεια λόγω της αβεβαιότητας σε σχέση με την εξέλιξη των μελλοντικών τιμών τους την χρονική στιγμή $t = t_1$, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την τιμή της κάθε μετοχής μιας και πρόκειται για τυχαίες μεταβλητές. Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε συνδιαστικά την κίνηση των μετοχών S_1 και S_2 καθώς κινούμαστε από την χρονική στιγμή $t = 0$ στη χρονική στιγμή $t = t_1$. Σύμφωνα με τα σενάρια του Πίνακα 5.1, οι τιμές των δύο μετοχών μπορούν να κινηθούν ανοδικά σε: S_1u_1 και S_2u_2 αντίστοιχα για κάθε μία, με πιθανότητα P_1, είτε να ανέβει η τιμή της πρώτης και να πέσει η τιμή της δεύτερης σε S_1u_1 και S_2d_2 αντίστοιχα, με πιθανότητα P_2 είτε να πέσει η τιμή της πρώτης και να ανέβει της δεύτερης σε S_1d_1 και S_2u_2 αντίστοιχα, με πιθανότητα P_3, είτε να πέσουν οι τιμές και των δύο μετοχών σε S_1d_1 και S_2d_2 αντίστοιχα, με πιθανότητα P_4. Οι ποσότητες u_i και d_i για $i = 1, 2$, αποτελούν τις παραμέτρους ανοδικής και καθοδικής κίνησης της μετοχής αντίστοιχα, ενώ ισχύει ότι $u_i d_i = 1$. Οι παράμετροι u, d διαφοροποιούνται για κάθε μία μετοχή σε u_1, u_2, d_1, d_2 [†].



Σχήμα 5.1: Υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων, δύο μετοχών ενός βήματος

Τα πιθανά σενάρια για την αξία του δικαιώματος στο χρόνο λήξης είναι τα εξής:

- Να αυξηθεί η τιμή της πρώτης μετοχής και να αυξηθεί της δεύτερης, οπότε η απόδοση του δικαιώματος στη λήξη είναι ίση με

$$C_{uu} = max(S_1u_1 - S_2u_2 - K, 0)$$

- Να αυξηθεί η τιμή της πρώτης μετοχής και να μειωθεί της δεύτερης, οπότε η απόδοση του δικαιώματος στη λήξη είναι ίση με

$$C_{ud} = max(S_1u_1 - S_2d_2 - K, 0)$$

- Να μειωθεί η τιμή της πρώτης μετοχής και να αυξηθεί της δεύτερης, οπότε η απόδοση του δικαιώματος στη λήξη είναι ίση με

$$C_{du} = max(S_1d_1 - S_2u_2 - K, 0)$$

[†] Όπου P_{uu} εννοείται P_1, όπου P_{ud} P_2, όπου P_{du} P_3 και όπου P_{dd} P_4

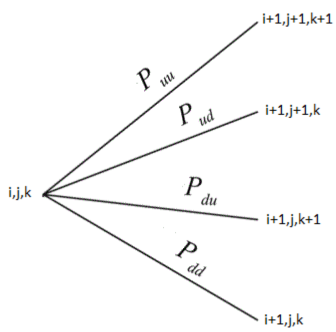
- Να μειωθούν οι τιμές και των δύο μετοχών, οπότε η απόδοση του δικαιώματος στη λήξη είναι ίση με

$$C_{dd} = max(S_1 d_1 - S_2 d_2 - K, 0)$$

Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζουμε την τιμή του δικαιώματος είναι ο εξής:

$$C_0 = e^{-r\delta t}\left(P_1 C_{uu} + P_2 C_{ud} + P_3 C_{du} + P_4 C_{dd}\right).$$

Παραπάνω παρουσιάσαμε το δένδρο μιας περιόδου αλλά η επέκταση για περισσότερες περιόδους είναι άμεση. Για να κάνουμε τιμολόγηση σε παραπάνω από μία περιόδους, ακολουθούμε την φιλοσοφία του διωνυμικού υποδείγματος των CRR και ουσιαστικά σχηματίζεται ένα δένδρο με διαφορετικούς κόμβους, όπου καθένας από οδηγεί σε τέσσερις διαφορετικές καταστάσεις της οικονομίας την επόμενη χρονική στιγμή. Σε ένα τέτοιο δένδρο, στον οριζόντιο ιδεατό άξονα i απεικονίζεται ο χρόνος (το χρονικό διάστημα $[0, T]$ είναι χωρισμένο σε κομμάτια μήκους $\delta t = T/N$), ενώ στον κάθετο απεικονίζονται οι διαφορετικές καταστάσεις του κόσμου (οι διαφορετικές τιμές των δύο μετοχών, j για την πρώτη και k για την δεύτερη) σε κάθε χρονική στιγμή. Οι κόμβοι συμβολίζονται με (i, j, k), όπου (i, j, k) φυσικοί αριθμοί με $i = 1, \ldots, T$ και $j, k = 0, \ldots, i$ πιθανές καταστάσεις της οικονομίας. Το i μας δείχνει πόσο απέχουμε από την αρχή του δένδρου και τα j, k μας δείχνουν τις ανοδικές κινήσεις της κάθε μετοχής. Κάθε κόμβος οδηγεί σε άλλους τέσσερις νέους κόμβους, οι οποίοι αντιστοιχούν σε ανοδικές ή καθοδικές κινήσεις των μετοχών συνδυαστικά. Πιο συγκεκριμένα, ο κόμβος (i, j, k) οδηγεί στον κόμβο $(i + 1, j, k)$, όπου πέφτουν οι τιμές και των δύο μετοχών, στον $(i+1, j, k+1)$, όπου πέφτει η τιμή της πρώτης μετοχής και ανεβαίνει της δεύτερης, στον $(i + 1, j + 1, k)$, όπου ανεβαίνει η τιμή της πρώτης μετοχής και πέφτει της δεύτερης και στον $(i+1, j+1, k+1)$, όπου ανεβαίνουν οι τιμές και των δύο μετοχών (την σύμβαση αυτή ακολουθήσαμε στους κώδικες που γράψαμε στο matlab). Όπου P_4 ορίζουμε την πιθανότητα να πέσουν οι τιμές και των δύο μετοχών, ενώ $C_{i+1,j,k}$ η τιμή του δικαιώματος στο επόμενο χρονικό βήμα αντίστοιχα. Ορίζουμε ως P_3 η πιθανότητα να πέσει η τιμή της πρώτης και να ανέβει η τιμή της δεύτερης, ενώ $C_{i+1,j,k+1}$ η τιμή του δικαιώματος στο επόμενο χρονικό βήμα αντίστοιχα. Ορίζουμε ως P_2 η πιθανότητα να ανέβει η τιμή της πρώτης και να πέσει η τιμή της δεύτερης μετοχής, ενώ $C_{i+1,j+1,k}$ η τιμή του δικαιώματος στο επόμενο χρονικό βήμα αντίστοιχα και P_1 η πιθανότητα να ανέβουν οι τιμές και των δύο μετοχών, με $C_{i+1,j+1,k+1}$ η τιμή του δικαιώματος στο επόμενο χρονικό βήμα αντίστοιχα.



Σχήμα 5.2: Ο γενικός κόμβος στο υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων

Συνοπτικά, για να τιμολογήσουμε το δικαίωμα αυτό με το δένδρο τεσσάρων αλμάτων για ένα δένδρο N περιόδων, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

B1. Υπολογίζουμε τις τιμές των μετοχών στη λήξη. Η τιμή της πρώτης μετοχής στο χρόνο λήξης, υπολογίζεται ως:

$$S^1_{(N,j,k)} = S^1_0 u_1^j d_1^{N-j},$$

ενώ της δεύτερης μετοχής, υπολογίζεται ως:

$$S^2_{(N,j,k)} = S^2_0 u_2^k d_2^{N-k}$$

Οι τιμές αυτές προκύπτουν εάν πραγματοποιηθούν έως τη χρονική στιγμή N για τη μετοχή S_1, j ανοδικές και $N-j$ καθοδικές κινήσεις και για τη μετοχή S_2, k ανοδικές και $N-k$ καθοδικές κινήσεις.

B2. Υπολογίζουμε τις αποδόσεις του δικαιώματος στη λήξη. Η απόδοση του δικαιώματος στο χρόνο λήξης, δηλαδή στον κόμβο (N,j,k) είναι:

$$\begin{aligned} C_{N,j,k} &= max\left(0, S^1_{(N,j,k)} - S^2_{(N,j,k)} - K\right) \\ &= max\left(0, S^1_0 u_1^j d_1^{N-j} - S^2_0 u_1^k d_1^{N-k} - K\right). \end{aligned}$$

B3. Τέλος, η τιμολόγηση του δικαιώματος, γίνεται προχωρώντας οπισθοδρομικά ως εξής:

$$C_{i,j,k} = e^{-r\delta t}\left(P_1 C_{i+1,j+1,k+1} + P_2 C_{i+1,j+1,k} + P_3 C_{i+1,j,k+1} + P_4 C_{i+1,j,k}\right)$$

μέχρι να φτάσουμε στην τιμή $C_{0,0,0}$, το οποίο αποτελεί την τιμή του δικαιώματος σήμερα.

Παράδειγμα 8. *Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης αγοράς γραμμένο πάνω σε δύο μετοχές, με τα εξής χαρακτηριστικά: αρχική τιμή $S_1 = 40$ και $S_2 = 40$ ευρώ, τιμή εξάσκησης $K = 10$ ευρώ, λήξη σε $T = 7/12$ του χρόνου, ετήσιο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο $r = 0.1$, μεταβλητότητα $\sigma_1 = 0.2$ και $\sigma_2 = 0.3$ αντίστοιχα, συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho = 0.5$ και $N = 1$ περίοδο. Επίσης $\delta t = T/N = (7/12)/1 = 0.583$. Επίσης οι τιμές των παραμέτρων $u_1 = 1.1650$, $u_2 = 1.2575$, $d_1 = 0.8583$ και $d_2 = 0.7952$. Οι τιμές των πιθανοτήτων είναι $P_1 = 0.4864$, $P_2 = 0.1664$, $P_3 = 0.0836$ και $P_4 = 0.2636$. $\mu_1 = r - 0.5\sigma_1^2 = 0.08$, ενώ $\mu_2 = r - 0.5\sigma_2^2 = 0.055$. $e^{-r\delta t} = 0.9433$.*

Η τιμή των μετοχών S_1 και S_2 στο χρόνο λήξης υπολογίζεται σύμφωνα με το B1 και μπορεί να πάρει για $N = 1$ τις παρακάτω τιμές:

$$\begin{aligned} S^1_{(1,0,0)} &= S^1_0 u_1^0 d_1^1 = 34.3337 \quad S^2_{(1,0,0)} = S^2_0 u_2^0 d_2^1 = 31.8090 \\ S^1_{(1,0,1)} &= S^1_0 u_1^0 d_1^1 = 34.3337 \quad S^2_{(1,0,1)} = S^2_0 u_2^1 d_2^0 = 50.3002 \\ S^1_{(1,1,0)} &= S^1_0 u_1^1 d_1^0 = 46.6015 \quad S^2_{(1,1,0)} = S^2_0 u_2^0 d_2^1 = 31.8090 \\ S^1_{(1,1,1)} &= S^1_0 u_1^1 d_1^0 = 46.6015 \quad S^2_{(1,1,1)} = S^2_0 u_2^1 d_2^0 = 50.3002 \end{aligned}$$

Η τιμή του δικαιώματος στο χρόνο λήξης υπολογίζεται βάσει του B2 και μπορεί να πάρει για $N = 1$ τις παρακάτω τιμές:

$$\begin{aligned} C_{1,0,0} &= max\left(0, S^1_{(1,0,0)} - S^2_{(1,0,0)} - K\right) \\ &= max(34.3337 - 31.8090 - 10, 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,0,1} &= max\left(0, S^1_{(1,0,1)} - S^2_{(1,0,1)} - K\right) \\ &= max(34.3337 - 50.3002 - 10, 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,1,0} &= max\left(0, S^1_{(1,1,0)} - S^2_{(1,1,0)} - K\right) \\ &= max(46.6015 - 31.8090 - 10, 0) = 4.7925 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,1,1} &= max\left(0, S^1_{(1,1,1)} - S^2_{(1,1,1)} - K\right) \\ &= max(46.6015 - 50.300 - 10, 0) = 0 \end{aligned}$$

*Τέλος, υπολογίζουμε την τιμή του δικαιώματος σύμφωνα με το **B3**:*

$$\begin{aligned} C_{0,0,0} &= e^{-r\delta t}\left(P_1 C_{i+1,j+1,k+1} + P_2 C_{i+1,j+1,k} + P_3 C_{i+1,j,k+1} + P_4 C_{i+1,j,k}\right) \\ &= e^{-r\delta t}\left(P_1 C_{1,1,1} + P_2 C_{1,1,0} + P_3 C_{1,0,1} + P_4 C_{1,0,0}\right) \\ &= 0.9433 \cdot (0.4864 \cdot 0 + 0.1664 \cdot 4.7925 + 0.0836 \cdot 0 + 0.2636 \cdot 0) \\ &= 0.7521 \end{aligned}$$

καταλήγουμε τελικά πως το $C_{0,0,0}$, αποτελεί και την ζητούμενη τιμή του δικαιώματος στον χρόνο $t = 0$.

Παράδειγμα 9. *Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης αγοράς, γραμμένο πάνω σε δύο μετοχές, με τα εξής χαρακτηριστικά: αρχική τιμή $S_1 = 40$ και $S_2 = 40$ ευρώ, τιμή εξάσκησης $K = 10$ ευρώ, λήξη σε $T = 7/12$ του χρόνου, ετήσιο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο $r = 0.1$, μεταβλητότητα $\sigma_1 = 0.2$ και $\sigma_2 = 0.3$ αντίστοιχα, συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho = 0.5$ και $N = 2$ περίοδοι. Επίσης $\delta t = T/N = (7/12)/2 = 0.291$. $\mu_1 = r - 0.5\sigma_1^2 = 0.08$, ενώ $\mu_2 = r - 0.5\sigma_2^2 = 0.055$. Επίσης οι τιμές των παραμέτρων $u_1 = 1.1141$, $u_2 = 1.1759$, $d_1 = 0.8976$ και $d_2 = 0.8504$. $e^{-r\delta t} = 0.9713$. Οι τιμές των πιθανοτήτων είναι $P_1 = 0.3329$, $P_2 = 0.4538$, $P_3 = 0.0957$ και $P_4 = 0.2962$.*

*Η τιμή της μετοχής S_1 υπολογίζεται βάσει του **B1** και μπορεί να πάρει για $N = 2$ τις παρακάτω τιμές:*

$$S^1_{(2,0,0)} = S^1_0 u_1^0 d_1^2 = 32.2286 \quad S^1_{(2,0,1)} = S_1 u_1^0 d_1^2 = 32.2286$$

$$S^1_{(2,1,0)} = S^1_0 u_1^1 d_1^1 = 40.0000 \quad S^1_{(2,0,2)} = S_1 u_1^0 d_1^2 = 32.2286$$

$$S^1_{(2,1,2)} = S^1_0 u_1^1 d_1^1 = 40.0000$$

$$S^1_{(2,1,1)} = S^1_0 u_1^1 d_1^1 = 40.0000 \quad S^1_{(2,2,0)} = S^1_0 u_1^2 d_1^0 = 49.6453$$

$$S^1_{(2,2,1)} = S^1_0 u_1^2 d_1^0 = 49.6453 \quad S^1_{(2,2,2)} = S^1_0 u_1^2 d_1^0 = 49.6453.$$

*Η τιμή της μετοχής S_2 υπολογίζεται βάσει του **B1** και μπορεί να πάρει για $N = 2$ τις παρακάτω τιμές:*

$$S^2_{(2,0,0)} = S^2_0 u_2^0 d_2^2 = 28.9289 \quad S^2_{(2,0,1)} = S^2_0 u_2^1 d_2^1 = 40.0000$$

$$S^2_{(2,1,0)} = S^2_0 u_2^0 d_2^2 = 28.9289 \quad S^2_{(2,0,2)} = S^2_0 u_2^2 d_2^0 = 55.3079$$

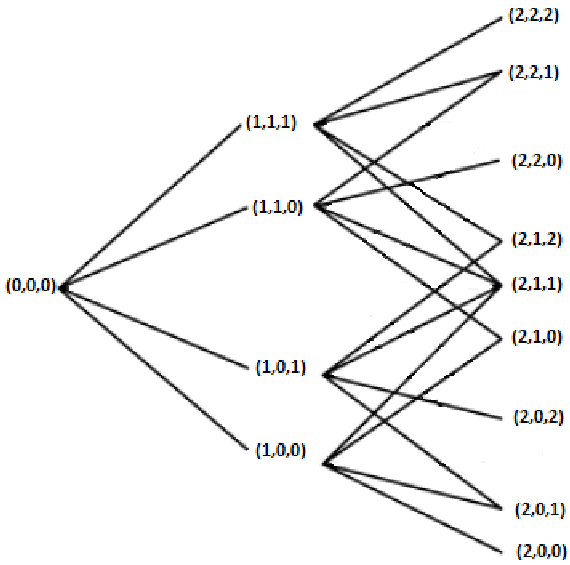
$$S^2_{(2,1,2)} = S^2_0 u_2^2 d_2^0 = 55.3079$$

$$S^2_{(2,1,1)} = S^2_0 u_2^1 d_2^1 = 40.0000 \quad S^2_{(2,2,0)} = S^2_0 u_2^0 d_2^2 = 28.9289$$

$$S^2_{(2,2,1)} = S^2_0 u_2^1 d_2^1 = 40.0000 \quad S^2_{(2,2,2)} = S^2_0 u_2^2 d_2^2 = 55.3079.$$

Η τιμή του δικαιώματος στο χρόνο λήξης υπολογίζεται βάσει του B2 και μπορεί να πάρει για $N = 2$ τις παρακάτω τιμές:

$$\begin{aligned} C_{2,0,0} &= max\left(0, S^1_{(2,0,0)} - S^2_{(2,0,0)} - K\right) \\ &= max(32.2286 - 28.9289 - 10, 0) = 0 \end{aligned}$$



Σχήμα 5.3: Κόμβοι στο υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων δύο χρονικών βημάτων

$$\begin{aligned}C_{2,0,1} &= max\left(0, S^1_{(2,0,1)} - S^2_{(2,0,1)} - K\right)\\ &= max(32.2286 - 40 - 10, 0) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{2,1,0} &= max\left(0, S^1_{(2,1,0)} - S^2_{(2,1,0)} - K\right)\\ &= max(40 - 28.9289 - 10, 0) = 1.0711\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{2,1,1} &= max\left(0, S^1_{(2,1,1)} - S^2_{(2,1,1)} - K\right)\\ &= max(40 - 40 - 10, 0) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{2,0,2} &= max\left(0, S^1_{(2,0,1)} - S^2_{(2,0,1)} - K\right)\\ &= max(32.2286 - 55.3079 - 10, 0) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{2,1,2} &= max\left(0, S^1_{(2,1,1)} - S^2_{(2,1,1)} - K\right)\\ &= max(40 - 55.3079 - 10, 0) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{2,2,0} &= max\left(0, S^1_{(2,1,0)} - S^2_{(2,1,0)} - K\right)\\ &= max(49.6453 - 28.9289 - 10, 0) = 10.7164\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{2,2,1} &= max\left(0, S^1_{(2,1,1)} - S^2_{(2,1,1)} - K\right)\\ &= max(49.6453 - 40 - 10, 0) = 0\end{aligned}$$

$$C_{2,2,2} = max\left(0, S^1_{(2,1,1)} - S^2_{(2,1,1)} - K\right)$$
$$= max(49.6453 - 55.3079 - 10, 0) = 0$$

*Από εδώ και έπειτα, πηγαίνουμε αναδρομικά μέχρι να φτάσουμε στην αρχική τιμή του δικαιώματος (από το τέλος προς την αρχή του δέντρου, βλ. Σχήμα 5.3) και βάσει του **B3**, για $N = 2$ μπορούμε να πάρουμε τις παρακάτω τιμές:*

$$C_{1,0,0} = 0.9713 \cdot (0.4538 \cdot 0 + 0.1543 \cdot 1.0711 + 0.0957 \cdot 0 + 0.2962 \cdot 0)$$
$$= 0.16052$$

$$C_{1,0,1} = 0.9713 \cdot (0.4538 \cdot 0 + 0.1543 \cdot 0 + 0.0957 \cdot 0 + 0.2962 \cdot 0) = 0$$

$$C_{1,1,0} = 0.9713 \cdot (0.4538 \cdot 0 + 0.1543 \cdot 10.7164 + 0.0957 \cdot 0 + 0.2962 \cdot 1.0711)$$
$$= 1.9137$$

$$C_{1,1,1} = 0.9713 \cdot (0.4538 \cdot 0 + 0.1543 \cdot 0 + 0.0957 \cdot 0 + 0.2962 \cdot 0) = 0$$

Τελικά,

$$C_{0,0,0} = e^{-r\delta t}\left(P_1C_{1,1,1} + P_2C_{1,1,0} + P_3C_{1,0,1} + P_4C_{1,0,0}\right)$$
$$= 0.9713 \cdot (0.4538 \cdot 0 + 0.1543 \cdot 1.9137 + 0.0957 \cdot 0 + 0.2962 \cdot 0.16052)$$
$$= 0.3329,$$

καταλήγουμε πως το $C_{0,0,0}$, αποτελεί την ζητούμενη τιμή του δικαιώματος στον χρόνο $t = 0$.

Παρατήρηση 12. Μόλις είδαμε το υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων τιμολόγησης δικαιωμάτων που είναι γραμμένα σε δύο μετοχές. Συγκεκριμένα, παρουσιάσαμε το παράδειγμα ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς στην διαφορά δύο μετοχών. Ωστόσο, η ισχύς του υποδείγματος αυτού φαίνεται ιδίως στην ικανότητά του να τιμολογεί Αμερικάνικα δικαιώματα, μιας και αποτελεί μέχρι σήμερα ένα πρόβλημα ιδιαίτερα απαιτητικό λόγω της σύνθετης - πολύπλοκης δομής των δικαιωμάτων αυτού του τύπου μιας και επιτρέπουν την εξάσκηση (και) πριν το χρόνο λήξης. Έστω πως έχουμε ένα Αμερικανικό δικαίωμα αγοράς. Η ιδέα πίσω από την τιμολόγηση του δικαιώματος αυτού με το υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων, είναι απλή (θεωρούμε πάλι το δικαίωμα στην διαφορά των δύο μετοχών, γνωστό και ως American Spread):

Εξετάζουμε σε κάθε κόμβο του δένδρου, αν μας συμφέρει να εξασκήσουμε το δικαίωμα ή να το κρατήσουμε και να συνεχίσουμε προς τα πίσω τη διαδικασία. Η διαδικασία έχει ως εξής: Εξετάζουμε στον κόμβο (i, j, k):

- Αν εξασκηθεί το δικαίωμα, η αξία του (απόδοση) είναι ίση με το μέγιστο μεταξύ του μηδενός και της ποσότητας $S^1_{(N,j,k)} - S^2_{(N,j,k)} - K$, δηλαδή $max\left(0, S^1_{(N,j,k)} - S^2_{(N,j,k)} - K\right)$.
- Αν δεν εξασκηθεί το δικαίωμα, τότε υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο που είδαμε παραπάνω, δηλαδή
$$e^{-r\delta t}\left(P_1C_{i+1,j+1,k+1} + P_2C_{i+1,j+1,k} + P_3C_{i+1,j,k+1} + P_4C_{i+1,j,k}\right).$$

Για να εξετάσουμε αν μας συμφέρει ή όχι η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος στον κόμβο (i, j, k), συγκρίνουμε τις δύο παραπάνω τιμές. Αν η πρώτη τιμή $max\left(0, S^1_{(N,j,k)} - S^2_{(N,j,k)} - K\right)$ υπερτερεί της δεύτερης

$$e^{-r\delta t}\left(P_1 C_{i+1,j+1,k+1} + P_2 C_{i+1,j+1,k} + P_3 C_{i+1,j,k+1} + P_4 C_{i+1,j,k}\right),$$

μας συμφέρει η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος (μιας και στον κόμβο αυτό η εξάσκηση δημιουργεί μεγαλύτερη αξία). Αντίθετα, αν η δεύτερη τιμή υπερτερεί της πρώτης, τότε η πρόωρη εξάσκηση δεν μας συμφέρει (το δικαίωμα δεν συμφέρει να εξασκηθεί πρόωρα σε αυτόν τον κόμβο) και συνεχίζουμε προς τα πίσω. Ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς δεν συμφέρει ποτέ να εξασκηθεί πριν την λήξη, άρα η αξία του θα είναι ίδια με αυτή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Συνοπτικά ωστόσο, η αξία του Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς στον κόμβο (i, j, k) δίνεται για το παραπάνω δικαίωμα από την σχέση:

$$\begin{aligned} C_{i,j,k} = max[&e^{-r\delta t}(P_1 C_{i+1,j+1,k+1} + P_2 C_{i+1,j+1,k} \\ &+ P_3 C_{i+1,j,k+1} + P_4 C_{i+1,j,k}), max(0, S^1_{(N,j,k)} - S^2_{(N,j,k)} - K)], \end{aligned}$$

ενώ αν ήταν δικαίωμα πώλησης, δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} C_{i,j,k} = max[&e^{-r\delta t}(P_1 C_{i+1,j+1,k+1} + P_2 C_{i+1,j+1,k} \\ &+ P_3 C_{i+1,j,k+1} + P_4 C_{i+1,j,k}), max(0, K - S^1_{(N,j,k)} - S^2_{(N,j,k)})]. \end{aligned}$$

5.3 Βασικά σημεία κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε έναν τρόπο τιμολόγησης δικαιωμάτων γραμμένων πάνω σε δύο μετοχές, γνωστό και ως υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων, όπως παρουσιάστηκε από τους Boyle, Evnine & Gibbs (1989) [13]. Όπως είδαμε η βασική φιλοσοφία του είναι παρόμοια με αυτή του διωνυμικού υποδείγματος που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2, με την διαφορά πως τώρα σε κάθε χρονική στιγμή, λαμβάνουμε υπόψην την από κοινού κίνηση των δύο μετοχών. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάσαμε:

- Την μαθηματική φιλοσοφία του υποδείγματος των τεσσάρων αλμάτων.
- Την αλγοριθμική προσέγγιση ώστε να κάνουμε τιμολόγηση σε δένδρο N περιόδων με το υπόδειγμα αυτό.
- Κάποια αριθμητικά παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση του υποδείγματος.

6

Το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων

Στο πρώτο κομμάτι της εργασίας είδαμε δύο από τα πιο σημαντικά μοντέλα τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης, το διωνυμικό και τριωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης. Οι προσεγγίσεις στις οποίες βασιστήκαμε είναι αυτές των Cox Ross & Rubinstein [19] και Kamrad & Ritchken [24] αντίστοιχα για κάθε υπόδειγμα και πρακτικά δεν είναι τίποτα άλλο παρά χρηματοοικονομικά μοντέλα σε διακριτό χρόνο σύμφωνα με τα οποία μπορούμε να τιμολογήσουμε Ευρωπαϊκά, αλλά κυρίως Αμερικάνικα δικαιώματα προαίρεσης (αγοράς και πώλησης). Τα υποδείγματα αυτά όπως προαναφέραμε χρησιμοποιούνται με επιτυχία στην πράξη ακόμη και σήμερα. Χαρακτηριστικό είναι πως πρόκειται για υποδείγματα τιμολόγησης δικαιωμάτων τα οποία είναι γραμμένα σε ένα μόνο υποκείμενο στοιχείο (πχ. μετοχή). Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως μπορούμε να τιμολογήσουμε ένα δικαίωμα που είναι γραμμένο σε δύο μετοχές, οι αποδόσεις των οποίων εμφανίζουν μεταξύ τους συσχέτιση. Στην κατεύθυνση αυτή παρουσιάσαμε μια άμεση επέκταση του διωνυμικού υποδείγματος που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2, το υπόδειγμα των Boyle, Evnine & Gibbs (1989) [13] που είναι γνωστό ως υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε ένα εναλλακτικό υπόδειγμα τιμολόγησης δικαιωμάτων που είναι γραμμένα σε παραπάνω από μία μετοχές (πάλι θα υποθέσουμε δύο μετοχές), το υπόδειγμα των Kamrad & Ritchken [24]. Το υπόδειγμα αυτό, που είναι γνωστό ως υπόδειγμα πέντε αλμάτων, είναι μια άμεση επέκταση του τριωνυμικού υποδείγματος που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 3. Μάλιστα, η φιλοσοφία του υποδείγματος των πέντε αλμάτων (μιας και σε κάθε χρονική περίοδο από κάθε έναν κόμβο ξεκινούν πέντε νέες τιμές) είναι ίδια με την φιλοσοφία του υποδείγματος των τεσσάρων αλμάτων που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μόνο που στην περίπτωση του υποδείγματος τεσσάρων αλμάτων προσεγγίζαμε την από κοινού λογαριθμοκανονική κατανομή (κάθε μετοχή ακολουθεί το υπόδειγμα της γεωμετρικής κίνησης Brown) με μία διαδικασία τεσσάρων αλμάτων. Στο κεφάλαιο αυτό, θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία μόνο που θα χρησιμοποιήσουμε μια διακριτή κατανομή πέντε αλμάτων.

6.1 Υπόδειγμα πέντε αλμάτων σε μία περίοδο

Στην παράγραφο αυτή, θεωρούμε ότι έχουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης (έστω Ευρωπαϊκού τύπου) γραμμένο σε δύο μετοχές οι αποδόσεις των οποίων εμφανίζουν μεταξύ τους συσχέτιση. Ο στόχος μας είναι να κάνουμε τιμολόγηση του δικαιώματος αυτού με το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων των Kamrad & Ritchken [24]. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η βασική ιδέα του υποδείγματος των πέντε αλμάτων δεν είναι διαφορετική από αυτή του υποδείγματος των τεσσάρων αλμάτων των Boyle, Evnine & Gibbs (1989) [13]. Ουσιαστικά, πρόκειται για μια άμεση επέκταση του τριωνυμικού δένδρου τιμολόγησης για την περίπτωση που το δικαίωμα είναι γραμμένο σε παραπάνω από μία μετοχές. Εδώ, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, για λόγους απλότητας θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση των δύο μετοχών αλλά η επέκταση για παραπάνω από δύο μετοχές γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Πιο αναλυτικά, έστω ότι έχουμε ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, γραμμένο σε δύο μετοχές. Θεωρούμε πως έχουμε δύο μετοχές, τις S_1 και S_2 με αντίστοιχες τιμές

S_t^1 και S_t^2, την χρονική στιγμή t. Για τις μετοχές S_1 και S_2 θεωρούμε τα ακόλουθα πέντε πιθανά σενάρια μετά από ένα χρονικό βήμα:

Πίνακας 6.1: Διαφορετικά σενάρια για την εξέλιξη των δύο μετοχών στο υπόδειγμα πέντε αλμάτων

S_1	S_2	**Σενάρια** ω
$\uparrow$	$\uparrow$	ω_1
$\uparrow$	$\downarrow$	ω_2
$\downarrow$	$\downarrow$	ω_3
$\downarrow$	$\uparrow$	ω_4
$-$	$-$	ω_5

- Να ανέβει η τιμή της μετοχής S_1 και να ανέβει και της S_2.
- Να ανέβει η τιμή της μετοχής S_1 και να πέσει της S_2.
- Να πέσει η τιμή της μετοχής S_1 και να πέσει της S_2.
- Να πέσει η τιμή της μετοχής S_1 και να ανέβει της S_2.
- Να παραμείνουν σταθερές οι τιμές και των δύο μετοχών.

Ίσως κάποιος παρατηρούσε πως η τιμή της μιας μετοχής μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί και της άλλης να παραμείνει αμετάβλητη. Αυτό ωστόσο κάνει αρκετά πιο πολύπλοκη την διαδικασία και ο κώδικας τον οποίο θα χρησιμοποιούσαμε στην συνέχεια θα γινόταν πολύ πιο σύνθετος και βαρύς αλγοριθμικά. Παρά την έρευνα των Kamrad & Ritchken [24], οι οποίοι απέδειξαν πως δεν έχει ιδιαίτερα σημαντικά οφέλη η χρήση των επιπλέον σεναρίων, θα μπορούσε ωστόσο αυτό να αποτελέσει ένα θέμα προς μελέτη ανοιχτό για το μέλλον. Η βασική ιδέα για να επεκταθεί το τριωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 3, στην περίπτωση που έχουμε ένα δικαίωμα γραμμένο σε δύο υποκείμενες μετοχές, είναι η εξής: Υποθέτοντας ότι οι μετοχές εξελίσσονται στον χρόνο με βάση το υπόδειγμα της γεωμετρικής κίνησης Brown, θα κατασκευάσουμε μία διακριτή κατανομή πιθανότητας πέντε αλμάτων (ένα για κάθε ένα σενάριο που παρουσιάζεται στον Πίνακα 6.1) για να προσεγγίσουμε την διδιάστατη λογαριθμική κατανομή. Αυτή την προσέγγιση άλλωστε ακολουθήσαμε και στην περίπτωση του υποδείγματος των τεσσάρων αλμάτων, μόνο που στην περίπτωση αυτή θεωρήσαμε μια διακριτή κατανομή τεσσάρων αλμάτων αντί για πέντε που θεωρούμε τώρα. Πιο αναλυτικά, έστω ότι οι μετοχές S_1 και S_2 εξελίσσονται στον χρόνο με βάση το υπόδειγμα της γεωμετρικής κίνησης Brown, δηλαδή με βάση τον μαθηματικό κανόνα:

$$dS_t^i = rS_t^i dt + \sigma_i S_t^i dW_t^i, \tag{6.1}$$

για $i = 1, 2$, η οποία σχέση μας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο συνδέεται η μεταβολή της τιμής της κάθε μετοχής στο χρονικό διάστημα $[t, t + \delta t]$ (δηλαδή το dS_t^i), με την τιμή της κάθε μετοχής την χρονική στιγμή t (δηλαδή το S_t^i). Με $r > 0$ συμβολίζουμε το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, σ_i είναι η μεταβλητότητα των τιμών της κάθε μετοχής και $(W_t^i, t \geq 0)$, ορίζουμε την κάθε μία τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown, για κάθε μετοχή, όπου $i = 1, 2$ αντίστοιχα για κάθε μετοχή με συντελεστή συσχέτισης $\rho \in [-1, 1]$. Θέτοντας ως S_t^1 την αρχική τιμή της πρώτης μετοχής την χρονική στιγμή t και S_t^2 την αρχική τιμή της δεύτερης μετοχής την χρονική στιγμή t, Η λύση της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (βλ. εξίσωση 2.11) μπορεί να δώσει την μεταβολή της τιμής της μετοχής από τον χρόνο t στον χρόνο $t + \delta t$, ως εξής:

$$S_{t+\delta t}^1 = S_t^1 \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\delta t + \sigma_1 \delta W_t^1\right], \tag{6.2}$$

για την πρώτη μετοχή και:

$$S^2_{t+\delta t} = S^2_t \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\delta t + \sigma_2 \delta W^2_t\right]. \tag{6.3}$$

για την δεύτερη μετοχή. Λογαριθμίζοντας την εξίσωση 6.2, έχουμε :

$$\ln\left(\frac{S^1_{t+\delta t}}{S^1_t}\right) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\delta t + \sigma_1 \delta W^1_t := \zeta_1(t), \tag{6.4}$$

Ομοίως λογαριθμίζοντας την εξίσωση 5.3, έχουμε :

$$\ln\left(\frac{S^2_{t+\delta t}}{S^2_t}\right) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\delta t + \sigma_2 \delta W^2_t := \zeta_2(t), \tag{6.5}$$

$\zeta_1(t)$ και $\zeta_2(t)$ αποτελούν δύο τυχαίες μεταβλητές κανονικά κατανεμημένες, όπου $\zeta_i(t), i = 1,2$ είναι μια τυχαία μεταβλητή κανονικά κατανεμημένη, με μέση τιμή $\mu_i \delta t$ και διακύμανση $\sigma_i^2 \delta t$, για $i = 1,2$ αντίστοιχα για κάθε μετοχή. Επιπλέον η συνδιακύμανση των $\zeta_1(t)$ και $\zeta_2(t)$ είναι $\rho\sigma_1\sigma_2\delta t$. Ισοδύναμα οι σχέσεις 6.4, 6.5 μπορούν να γραφούν ως:

$$\ln[S^i_{t+\delta t}] = \ln[S^i_t] + \zeta_i(t).$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η βασική φιλοσοφία είναι να προσεγγίσουμε την από κοινού κατανομή των $\zeta_i(t)$ με ένα ζεύγος διακριτών τυχαίων μεταβλητών τις οποίες συμβολίζουμε με $\zeta^a_1(t)$ και $\zeta^a_2(t)$ στο διάστημα $[t, t+\delta t]$ που ακολουθούν την παρακάτω κατανομή:

Πίνακας 6.2: Διακριτή τυχαία μεταβλητή για το υπόδειγμα πέντε αλμάτων

$\zeta^a_1(t)$	$\zeta^a_2(t)$	**Πιθανότητα**	**Σενάρια του κόσμου**
υ_1	υ_2	P_1	ω_1
υ_1	$-\upsilon_2$	P_2	ω_2
$-\upsilon_1$	$-\upsilon_2$	P_3	ω_3
$-\upsilon_1$	υ_2	P_4	ω_4
0	0	P_5	ω_5

Παρατήρηση 13. Οι Kamrad & Ritchken [24], ορίσαν το $\upsilon_i = \sigma_i\lambda_i\sqrt{dt}$ για $i = 1,2$, (για την παράμετρο λ μιλήσαμε στο τριωνυμικό υπόδειγμα μίας μετοχής των Kamrad & Ritchken [24] και θα δούμε και άλλα πράγματα στη συνέχεια) με παρόμοιο τρόπο με αυτόν του διωνυμικού υποδείγματος των Cox, Ross & Rubinstein [19] και συγκεκριμένα έθεσαν ως $u_i = e^{\upsilon_i}$ και $d_i = e^{-\upsilon_i}$, για $i = 1,2$. Επίσης, ισχύει ότι $u_i d_i = 1$, δηλαδή έχουμε και εδώ ένα πλαίσιο συνδιαστικών δένδρων τιμολόγησης (recombining lattice framework), κάτι το οποίο υποθέσαμε και στα τρία προηγούμενα κεφάλαια.

Ο βασικός στόχος της προσέγγισης αυτής είναι να υπολογίσουμε τις πιθανότητες P_1, P_2, P_3, P_4 και P_5. Για να φέρουμε εις πέρας τον παραπάνω στόχο, θα εξισώσουμε την μέση τιμή, την διακύμανση και την συνδιακύμανση της συνεχούς με της διακριτής κατανομής (γιατί τώρα οι τυχαίες μεταβλητές εμφανίζουν μεταξύ τους συσχέτιση). Η συνεχής τυχαία μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_i\delta t$, διακύμανση $\sigma_i^2\delta t$ και συνδιακύμανση $\rho\sigma_1\sigma_2\delta t$. Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε τις τιμές αυτές της $\zeta^a_i(t)$.

Ξεκινάμε με την τυχαία μεταβλητή $\zeta^a_1(t)$ και υπολογίζουμε την μέση τιμή και την διακύμανση:

$$\begin{aligned} E(\zeta^a_1(t)) &= P_1\upsilon_1 + P_2\upsilon_1 - P_3\upsilon_1 - P_4\upsilon_1 + P_5 \cdot 0 \\ &= \upsilon_1(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(\zeta_1^a(t)) &= E[\zeta_1^a(t)^2] - [E\zeta_1^a(t))]^2 \\
&= P_1 \upsilon_1^2 + P_2 \upsilon_1^2 + P_3 \upsilon_1^2 + P_4 \upsilon_1^2 + P_5 \cdot 0 - [\upsilon_1 (P_1 + P_2 - P_3 - P_4)]^2 \\
&= \upsilon_1^2 (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) - [\upsilon_1 (P_1 + P_2 - P_3 - P_4)]^2
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια για την τυχαία μεταβλητή $\zeta_2^a(t)$ υπολογίζουμε την μέση τιμή και την διακύμανση:

$$
\begin{aligned}
E\left(\zeta_2^a(t)\right) &= P_1 \upsilon_2 - P_2 \upsilon_2 - P_3 \upsilon_2 + P_4 \upsilon_2 + P_5 \cdot 0 \\
&= \upsilon_2 (P_1 - P_2 - P_3 + P_4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(\zeta_2^a(t)) &= E[\zeta_2^a(t)^2] - [E(\zeta_2^a(t))]^2 \\
&= P_1 \upsilon_2^2 + P_2 \upsilon_{2+}^2 P_3 \upsilon_2^2 + P_4 \upsilon_2^2 + P_5 \cdot 0 - \upsilon_2 [(P_1 - P_2 - P_3 + P_4)]^2 \\
&= \upsilon_2^2 (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) - \upsilon_2 [(P_1 + P_2 - P_3 + P_4)]^2
\end{aligned}
$$

Η συνδιακύμανση των δύο αυτών τυχαίων μεταβλητών είναι η εξής:

$$
\begin{aligned}
Cov(\zeta_1^a(t), \zeta_2^a(t)) &= E[\zeta_1^a(t) \zeta_2^a(t)] - E(\zeta_1^a(t)) E(\zeta_2^a(t)) \\
&= P_1 \upsilon_1 \upsilon_2 + P_2 \upsilon_1 (-\upsilon_2) + P_3 (-\upsilon_1)(-\upsilon_2) + P_4 (-\upsilon_1) \upsilon_2 \\
&- [\upsilon_1 (P_1 + P_2 - P_3 - P_4)][\upsilon_2 (P_1 - P_2 - P_3 + P_4)] \\
&= \upsilon_1 \upsilon_2 (P_1 - P_2 + P_3 - P_4) \\
&- [\upsilon_1 (P_1 + P_2 - P_3 - P_4)][\upsilon_2 (P_1 - P_2 - P_3 + P_4)]
\end{aligned}
$$

- Απαιτούμε για την περίπτωση της μετοχής S_1 η μέση τιμή της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής να ισούται με αυτή της διακριτής:

$$\upsilon_1 (P_1 + P_2 - P_3 - P_4) = \mu_1 \delta t. \tag{6.6}$$

- Απαιτούμε για την περίπτωση της μετοχής S_2 η μέση τιμή της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής να ισούται με αυτή της διακριτής:

$$\upsilon_2 (P_1 - P_2 - P_3 + P_4) = \mu_2 \delta t. \tag{6.7}$$

- Απαιτούμε έπειτα για την μετοχή S_1 η διακύμανση της κανονικής κατανομής να ισούται με αυτή της διακριτής:

$$\upsilon_1^2 (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) - [\upsilon_1 (P_1 + P_2 - P_3 - P_4)]^2 = \sigma_1^2 \delta t.$$

  Παρατηρούμε πως $\upsilon_1 (P_1 + P_2 - P_3 - P_4) = \mu_1 \delta t$, επομένως και $[\upsilon_1 (P_1 + P_2 - P_3 - P_4)]^2 = \mu_1^2 \delta t^2 = 0$, μιάς και το δt^2 αποτελεί μία πολύ μικρή ποσότητα και μιάς και θεωρείται αμελητέα, μπορεί να παραληφθεί. Έτσι,

$$\upsilon_1^2 (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = \sigma_1^2 \delta t \tag{6.8}$$

- Απαιτούμε για την μετοχή S_2 η διακύμανση της κανονικής κατανομής να ισούται με αυτή της διακριτής:

$$\upsilon_1^2 (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) - \upsilon_1 [(P_1 + P_2 - P_3 + P_4)]^2 = \sigma_2^2 \delta t.$$

Παρατηρούμε πως $\upsilon_2(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) = \mu_2 \delta t$, επομένως και $[\upsilon_2(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)]^2 = \mu_2^2 \delta t^2 = 0$, μιάς και το δt^2 αποτελεί μία πολύ μικρή ποσότητα και μιάς και θεωρείται αμελητέα, μπορεί να παραληφθεί. Έτσι,

$$\upsilon_2^2(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = \sigma_2^2 \delta t \tag{6.9}$$

- Απαιτούμε τέλος για την μετοχή S_1 και S_2 η συνδιακύμανση της κανονικής κατανομής να ισούται με αυτή της διακριτής:

$$\begin{aligned}&\upsilon_1 u_2(P_1 - P_2 + P_3 - P_4)\\ &\quad - [\upsilon_1(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)][\upsilon_2(P_1 + P_2 - P_3 + P_4)] = \rho\sigma_1\sigma_2\delta t.\end{aligned}$$

  Παρατηρούμε πως $\upsilon_1(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) = \mu_1 \delta t$ και πως $\upsilon_2(P_1 + P_2 - P_3 + P_4) = \mu_2 \delta t$, επομένως και $[\upsilon_1(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)][\upsilon_2(P_1 - P_2 + P_3 - P_4)] = \mu_1 \delta t \mu_2 \delta t = \mu_1 \mu_2 (\delta t)^2$, μιάς και το $\delta t^2 = 0$ αποτελεί μία πολύ μικρή ποσότητα και μιάς και θεωρείται αμελητέα, μπορεί να παραληφθεί. Έτσι,

$$\upsilon_1\upsilon_2(P_1 - P_2 + P_3 - P_4) = \rho\sigma_1\sigma_2\delta t. \tag{6.10}$$

Καταλήγουμε έτσι στο σύστημα 6.11 το οποίο αποτελείται από τις εξισώσεις 6.6, 6.7, 6.8, 6.9 και 6.10 και είναι το εξής:

$$\begin{aligned}\upsilon_1\left(P_1 + P_2 - P_3 - P_4\right) &= \mu_1 \delta t\\ \upsilon_2\left(P_1 - P_2 - P_3 + P_4\right) &= \mu_2 \delta t\\ \upsilon_1^2\left(P_1 + P_2 + P_3 + P_4\right) &= \sigma_1^2 \delta t\\ \upsilon_2^2\left(P_1 + P_2 + P_3 + P_4\right) &= \sigma_2^2 \delta t\\ \upsilon_1\upsilon_2\left(P_1 - P_2 + P_3 - P_4\right) &= \rho\sigma_1\sigma_2\delta t\end{aligned} \tag{6.11}$$

Αρχικά αντικαθιστώντας το $\upsilon_i = \lambda_i \sigma_i \sqrt{\delta t}$ για $i = 1, 2$ στις εξισώσεις του συστήματος 6.11, παρατηρούμε πως γράφεται στην ακόλουθη απλοποιημένη μορφή:

$$\begin{aligned}(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) &= \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1\sigma_1}\right)\sqrt{\delta t}\\ (P_1 - P_2 - P_3 + P_4) &= \left(\frac{\mu_2}{\lambda_2\sigma_2}\right)\sqrt{\delta t}\\ (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) &= \frac{1}{\lambda_1^2}\\ (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) &= \frac{1}{\lambda_2^2}\\ (P_1 - P_2 + P_3 - P_4) &= \frac{\rho}{\lambda_1\lambda_2}\end{aligned} \tag{6.12}$$

Από την τρίτη και την τέταρτη εξίσωση του παραπάνω συστήματος καταλήγουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ με $\lambda \geq 1$ καθώς το $\sum_{j=1}^{4} P_j$ πρέπει να είναι μικρότερο της μονάδας εφόσον στην περίπτωση αυτή έχουμε πέντε πιθανότητες (που πρέπει να αθροίζουν στην μονάδα). Λύνοντας λοιπόν το σύστημα 6.12, με την επιπλέον συνθήκη ότι $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$ (μιας και πρόκειται για πιθανότητες) προκύπτουν οι τιμές των πέντε πιθανοτήτων, που είναι και το ζητούμενο:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 0.25\left[\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\rho}{\lambda^2}+\frac{\sqrt{\delta t}}{\lambda}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}+\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\\
P_2 &= 0.25\left[\frac{1}{\lambda^2}-\frac{\rho}{\lambda^2}+\frac{\sqrt{\delta t}}{\lambda}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}-\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\\
P_3 &= 0.25\left[\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\rho}{\lambda^2}+\frac{\sqrt{\delta t}}{\lambda}\left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1}-\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\\
P_4 &= 0.25\left[\frac{1}{\lambda^2}-\frac{\rho}{\lambda^2}+\frac{\sqrt{\delta t}}{\lambda}\left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1}+\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\\
P_5 &= 1-\frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Παρατήρηση 14. Παρατηρώντας τις εξισώσεις 6.13, αυτό που αμέσως διακρίνουμε είναι πως οι πιθανότητες P_1, P_2, P_3, P_4 και P_5, είναι συναρτήσεις του λ, επομένως έχει πολύ ενδιαφέρον να δούμε πώς αυτές συμπεριφέρονται για διάφορα λ. Καταρχάς, εφόσον τα P_1, P_2, P_3, P_4 και P_5 είναι πιθανότητες θα περίμενε κανείς οι ποσότητες αυτές να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός και επιπλέον να αθροίζουν στη μονάδα. Στον Πίνακα 6.3 έχουμε υπολογίσει για μία συγκεκριμένη περίπτωση Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς τα P_1, P_2, P_3, P_4 και P_5 καθώς και το άθροισμά τους, για διάφορες τιμές του λ από 0.2 μέχρι 2. Σε πρώτη φάση παρατηρούμε πως όταν μεταβάλλεται το λ μεταβάλλονται και οι τιμές των πιθανοτήτων. Επίσης παρατηρούμε πως η τιμή της παραμέτρου λ πρέπει να είναι $\lambda \geq 1$ (επιβεβαιώνοντας έτσι τα αποτελέσματα των Kamrad & Ritchken [24]), μιας και αν $\lambda < 1$, η πιθανότητα (P_5) μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, ενώ οι υπόλοιπες μπορεί να είναι μεγαλύτερες της μονάδας, πράγμα το οποίο δεν θέλουμε γιατί πρόκειται για πιθανότητες. Αυτό άλλωστε αποτελεί και το μεγαλύτερο πρόβλημα στην ανάλυση του Boyle [16] και για τον λόγο αυτό οι Kamrad & Ritchken [24] πρότειναν να χρησιμοποιήσουμε την παράμετρο $\lambda \geq 1$. Για $\lambda \geq 1$, βλέπουμε πως τα P_1, P_2, P_3, P_4 και P_5 είναι μεταξύ του μηδενός και του ένα, είναι όλα θετικά και αθροίζουν στη μονάδα. Αν το $\lambda = 1$, παρατηρούμε πως η πιθανότητα $P_5 = 0$. Στην περίπτωση αυτή θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο πως το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων συμπίπτει με το υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων.

Πίνακας 6.3: Τιμές πιθανοτήτων υποδείγματος πέντε αλμάτων δικαιώματος γραμμένο σε δύο μετοχές, για διάφορα λ, $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $r = 0.04879$, σ_1=0.2, σ_2=0.3, $T = 7/12$, $N = 50$, $\rho = 0.5$.

λ	P1	P2	P3	P4	P5	Άθροισμα
0.2	9.3961	3.1427	9.3539	3.1073	-24.0000	1
0.4	2.3543	0.7901	2.3332	0.7724	-5.2500	1
0.6	1.0487	0.3531	1.0346	0.3413	-1.7778	1
0.8	0.5912	0.1997	0.5808	0.1909	-0.5625	1
1.0	0.3792	0.1285	0.3708	0.1215	0	1
1.2	0.2639	0.0898	0.2569	0.0839	0.3056	1
1.4	0.1943	0.0663	0.1883	0.0612	0.4898	1
1.6	0.1491	0.0510	0.1438	0.0466	0.6094	1
1.8	0.1181	0.0406	0.1134	0.0366	0.6914	1
2.0	0.0959	0.0330	0.0916	0.0295	0.7500	1
1.11803	0.3038	0.10302	0.2962	0.0968	0.2	1

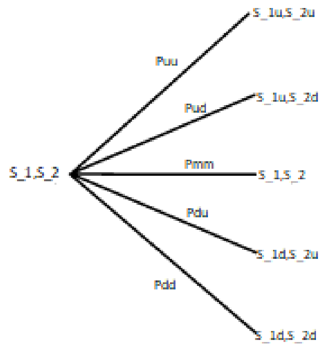
Ένα πολύ ενδιαφέρον ζήτημα που προκύπτει στο σημείο αυτό, είναι η εκτίμηση της κατάλληλης τιμής του λ (αν φυσικά υπάρχει μια τέτοια κατάλληλη τιμή για κάθε περίπτωση). Το θέμα αυτό ξεφεύγει από το πλαίσιο της παρούσας εργασίας, αλλά θα επεκταθούμε λίγο πιο αναλυτικά παρακάτω. Αναφέρουμε πάντως, πως μέσα από προσομοιώσεις οι Kamrad & Ritchken κατέληξαν στην τιμή $\lambda = 1.11803$, για την περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος call on max (για την περίπτωση των δύο μετοχών), αφού παρατήρησαν πως για αυτή την τιμή κατά μέσο όρο παίρνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα όταν το δικαίωμα είναι ITM, ATM, OTM την χρονική στιγμή $t = 0$. Η τιμή αυτή του λ αντιστοιχεί στην πιθανότητα οριζοντίου άλματος $P_5 = 0.2$. Οι Kamrad & Ritchken, για διάφορες περιπτώσεις Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης, κατέληξαν στο συμπέρασμα πως η πιθανότητα οριζοντίου άλματος είναι κοντά στο 1/5 μας δίνει πολύ καλά αποτελέσματα, οπότε δεν θα επεκταθούμε περαιτέρω στο θέμα και θα μείνουμε στην τιμή αυτή.

6.2 Αλγοριθμική φιλοσοφία υποδείγματος πέντε αλμάτων

Παραπάνω παρουσιάσαμε τι συμβαίνει σε ένα διάστημα μήκους δt. Όπως προαναφέρθηκε μας ενδιαφέρει να κατασκευάσουμε ένα δένδρο όπου σε κάθε κόμβο να έχει πέντε πιθανές καταστάσεις για την επόμενη χρονική στιγμή. Για να πετύχουμε τον στόχο αυτό θα ακολουθήσουμε μια αλγοριθμική διαδικασία παρόμοια με αυτή που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στο σημείο αυτό για να γίνει πιο κατανοητή η διαδικασία αυτή, θα παρουσιάσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Θεωρούμε ένα δικαιώμα προαίρεσης αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου (European spread), γραμμένο σε δύο μετοχές με απόδοση $[max(S_1(T) - S_2(T) - K), 0]$. Το δικαίωμα αυτό δεν μπορεί να εξασκηθεί πριν το χρόνο λήξης $t = T$. Μένει να δούμε πώς θα γίνει ο υπολογισμός της τιμής του δικαιώματος την χρονική στιγμή $t = 0$. Θεωρούμε ένα χρονικό διάστημα μήκους $\delta t > 0$, μεταξύ των χρονικων στιγμών $t = 0$ και $t_1 = T > 0$. Για απλότητα συμβολίζουμε την αρχική τιμή της πρώτης μετοχής με S_1, με $S_1 > 0$ την χρονική στιγμή $t = 0$, και την αρχική τιμή της δεύτερης μετοχής με S_2, με $S_2 > 0$ την χρονική στιγμή $t = 0$. Αρχικά η τιμή των μετοχών μας είναι γνωστή από την παρατήρησή τους στην χρηματιστηριακή αγορά, ενώ στη συνέχεια λόγω της αβεβαιότητας σε σχέση με την εξέλιξη των μελλοντικών τιμών τους την χρονική στιγμή $t = t_1$, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την τιμή της κάθε μετοχής μιάς και πρόκειται για τυχαίες μεταβλητές. Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε συνδυαστικά την κίνηση των μετοχών S_1 και S_2 καθώς κινούμαστε από την χρονική στιγμή $t = 0$ στη χρονική στιγμή $t = t_1$. Σύμφωνα με τα σενάρια του Πίνακα 6.1, οι τιμές των μετοχών μπορούν να κινηθούν ανοδικά σε: S_1u_1 και S_2u_2 αντίστοιχα, με πιθανότητα P_1, είτε να ανέβει η τιμή της πρώτης και να πέσει η τιμή της δεύτερης σε S_1u_1 και S_2d_2 αντίστοιχα, με πιθανότητα P_2 είτε να πέσει η τιμή της πρώτης και να πέσει και της δεύτερης σε S_1d_1 και S_2d_2 αντίστοιχα, με πιθανότητα P_3, είτε να πέσει η τιμή της πρώτης και να ανέβει η τιμή της δεύτερης σε S_1d_1 και S_2u_2 αντίστοιχα, με πιθανότητα P_4, είτε οι τιμές και των δύο μετοχών να παραμείνουν σταθερές S_1 και S_2 αντίστοιχα, με πιθανότητα P_5.

Τα πιθανά σενάρια για την αξία του δικαιώματος στο χρόνο λήξης είναι τα εξής:

- Να αυξηθεί η τιμή της πρώτης μετοχής και να αυξηθεί της δεύτερης, οπότε η απόδοση του δικαιώματος στη λήξη είναι ίση με
$$C_{uu} = max(S_1u_1 - S_2u_2 - K, 0)$$
- Να αυξηθεί η τιμή της πρώτης μετοχής και να μειωθεί της δεύτερης, οπότε η αξία του δικαιώματος είναι ίση με
$$C_{ud} = max(S_1u_1 - S_2d_2 - K, 0)$$
- Να μειωθούν οι τιμές και των δύο μετοχών, οπότε η απόδοση του δικαιώματος στη λήξη είναι ίση με
$$C_{dd} = max(S_1d_1 - S_2d_2 - K, 0)$$



Σχήμα 6.1: Υπόδειγμα πέντε αλμάτων, δύο μετοχών ενός βήματος

- Να μειωθεί η τιμή της πρώτης μετοχής και να αυξηθεί της δεύτερης, οπότε η απόδοση του δικαιώματος στη λήξη είναι ίση με

$$C_{du} = max(S_1 d_1 - S_2 u_2 - K, 0)$$

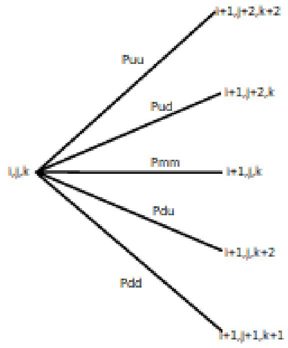
- Να παραμείνουν σταθερές οι τιμές και των δύο μετοχών, οπότε η απόδοση του δικαιώματος στη λήξη είναι ίση με

$$C_{mm} = max(S_1 - S_2 - K, 0)$$

Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζουμε την τιμή του δικαιώματος είναι ο εξής:

$$C_0 = e^{-r\delta t}(P_1 C_{uu} + P_2 C_{ud} + P_3 C_{dd} + P_4 C_{du} + P_5 C_{mm}).$$

Παραπάνω παρουσιάσαμε το δένδρο μιας περιόδου αλλά η επέκταση για περισσότερες περιόδους είναι άμεση. Για να κάνουμε τιμολόγηση σε παραπάνω από μία περιόδους, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτή του δένδρου των τεσσάρων αλμάτων. Ουσιαστικά πάλι σχηματίζεται ένα δέντρο με διαφορετικούς κόμβους, όπου ο καθένας από τους οποίους οδηγεί σε πέντε διαφορετικές καταστάσεις της οικονομίας την επόμενη χρονική στιγμή. Σε ένα τέτοιο δένδρο, ο οριζόντιος ιδεατός άξονας i απεικονίζεται ο χρόνος (το χρονικό διάστημα $[0, T]$ είναι χωρισμένο σε κομμάτια μήκους $\delta t = T/N$), ενώ στον κάθετο απεικονίζονται οι διαφορετικές καταστάσεις του κόσμου (οι διαφορετικές τιμές των δύο μετοχών, j για την πρώτη και k για την δεύτερη) σε κάθε χρονική στιγμή. Οι κόμβοι συμβολίζονται με (i, j, k) όπου (i, j, k) φυσικοί αριθμοί με $i = 1, \ldots, T$ και $j, k = 0, \ldots, i$ πιθανές καταστάσεις της οικονομίας. Το i μας δείχνει πόσο απέχουμε από την αρχή του δένδρου και τα j, k μας δείχνουν τις ανοδικές ή καθοδικές κινήσεις της κάθε μετοχής. Ο κάθε κόμβος οδηγεί σε άλλους πέντε νέους κόμβους, οι οποίοι αντιστοιχούν σε ανοδικές ή καθοδικές κινήσεις των μετοχών συνδυαστικά, λαμβάνοντας υπόψην και το σενάριο οι τιμές των μετοχών να μην μεταβληθούν. Πιο συγκεκριμένα, ο κόμβος (i, j, k) οδηγεί στον κόμβο $(i + 1, j, k)$, όπου πέφτουν οι τιμές και των δύο μετοχών, στον $(i + 1, j, k + 2)$, όπου πέφτει η τιμή της πρώτης μετοχής και ανεβαίνει της δεύτερης, στον $(i + 1, j + 2, k)$, όπου ανεβαίνει η τιμή της πρώτης μετοχής και πέφτει της δεύτερης, στον $(i+1, j+2, k+2)$, όπου ανεβαίνουν οι τιμές και των δύο μετοχών και στον κόμβο $(i+1, j+1, k+1)$, όπου οι τιμές και των δύο μετοχών παραμένουν αμετάβλητες (την σύμβαση αυτή ακολουθήσαμε στους κώδικες που γράψαμε στο matlab). . Όπου P_1 ορίζουμε την πιθανότητα να ανέβουν οι τιμές και των δύο μετοχών, με $C_{i+1,j+2,k+2}$ η τιμή του δικαιώματος στο επόμενο χρονικό βήμα, όπου P_2 η πιθανότητα να ανέβει η τιμή της πρώτης και να πέσει η τιμή της δεύτερης μετοχής, ενώ $C_{i+1,j+2,k}$ η τιμή του δικαιώματος στο επόμενο χρονικό βήμα αντίστοιχα, P_3 ορίζουμε την πιθανότητα να πέσουν οι τιμές και των δύο μετοχών, ενώ $C_{i+1,j,k}$ η τιμή του δικαιώματος στο επόμενο χρονικό βήμα αντίστοιχα, P_4 η πιθανότητα να πέσει η τιμή της πρώτης και να ανέβει η τιμή της δεύτερης, ενώ $C_{i+1,j,k+2}$ η τιμή του δικαιώματος στο επόμενο χρονικό βήμα αντίστοιχα και P_5 ορίζουμε την πιθανότητα οι τιμές και των δύο μετοχών να παραμείνουν σταθερές, ενώ $C_{i+1,j+1,k+1}$ η τιμή του δικαιώματος στο επόμενο χρονικό βήμα αντίστοιχα.



Σχήμα 6.2: Ο γενικός κόμβος στο υπόδειγμα των πέντε αλμάτων

Παρατήρηση 15. Παρατηρούμε πως το υπόδειγμα τιμολόγησης πέντε αλμάτων, γεννά σε κάθε κόμβο πέντε νέες τιμές, δηλαδή πέντε διαφορετικά πιθανά σενάρια. Ένας τρόπος με τον οποίο θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις τιμές της μετοχής σε κάθε κόμβο του δένδρου της μορφής (i, j, k), είναι ως

$$S_{i,j,k} = S_0^1 u_1^{max(j-i,0)} d_1^{max(i-j,0)}$$

για την πρώτη μετοχή και ως

$$S_{i,j,k} = S_0^2 u_2^{max(j-k,0)} d_2^{max(k-j,0)}$$

για την δεύτερη. Στην πράξη έστω πως έχουμε ένα δέντρο N περιόδων. Εφόσον ο αρχικός κόμβος είναι ο $(i, j, k) = (0, 0, 0)$, τότε η τιμή των μετοχών την επόμενη χρονική στιγμή $t = t_1 > 0$ θα είναι $S_{i+1,j+1,k+1} = S_0^1 u_1^{max(1-1,0)} d_1^{max(1-1,0)} = S_1$ και $S_{i+1,j+1,k+1} = S_0^2 u_2^{max(1-1,0)} d_2^{max(1-1,0)} = S_2$, εφόσον η τιμή και των δύο παραμείνει σταθερή, θα είναι $S_{i+1,j+0,k+2} = S_0^1 u_1^{max(1-0,0)} d_2^{max(0-1,0)} = S_1 u_1$ και $S_{i+1,j+0,k+2} = S_0^2 u_2^{max(1-2,0)} d_2^{max(2-1,0)} = S_2 d_2$, εφόσον η τιμή της πρώτης ανέβει και της δεύτερης πέσει, θα είναι $S_{i+1,j+2,k+2} = S_0^1 u_1^{max(1-2,0)} d_1^{max(2-1,0)} = S_1 d_1$ και $S_{i+1,j+2,k+2} = S_0^2 u_2^{max(1-2,0)} d_2^{max(2-1,0)} = S_2 d_2$, εφόσον η τιμή της και των δύο μετοχών πέσει, θα είναι $S_{i+1,j+2,k+0} = S_0^1 u_1^{max(1-2,0)} d_1^{max(2-1,0)} = S_1 d_1$ και $S_{i+1,j+2,k+0} = S_0^2 u_2^{max(1-0,0)} d_2^{max(0-1,0)} = S_2 u_2$, εφόσον η τιμή της πρώτης μετοχής πέσει και της δεύτερης ανέβει, ενώ τέλος η τιμή της κάθε μετοχής θα είναι $S_{i+1,j+0,k+0} = S_0^1 u_1^{max(1-0,0)} d_1^{max(0-1,0)} = S_1 u_1$ και $S_{i+1,j+0,k+0} = S_0^2 u_2^{max(1-0,0)} d_2^{max(0-1,0)} = S_2 u_2$ αντίστοιχα, εφόσον η τιμή και των δύο μετοχών ανέβει. Βλ. Σχήμα 6.1.

Συνοπτικά, τα βήματα που ακολουθούμε για να τιμολογήσουμε το δικαίωμα αυτό με ένα δένδρο πέντε αλμάτων και N περιόδων, είναι τα εξής:

Β1. Υπολογίζουμε τις τιμές των μετοχών στη λήξη. Η τιμή της πρώτης μετοχής στο χρόνο λήξης, υπολογίζεται ως:

$$S_{(N,j,k)}^1 = S_0^1 u_1^{max(j-N,0)} d_1^{max(N-j,0)},$$

ενώ της δεύτερης μετοχής, αντιστοιχεί στην τιμή:

$$S^2_{(N,j,k)} = S^2_0 u_2^{max(k-N,0)} d_2^{max(N-k,0)}$$

B2. Υπολογίζουμε τις αποδόσεις του δικαιώματος στη λήξη. Η απόδοση του δικαιώματος στο χρόνο λήξης, δηλαδή στον κόμβο (N, j, k) είναι:

$$\begin{aligned} C_{N,j,k} &= max\left(0, S^1_{(N,j,k)} - S^2_{(N,j,k)} - K\right) \\ &= max\left(0, S^1_0 u_1^{max(j-N,0)} d_1^{max(N-j,0)} - S^2_0 u_2^{max(k-N,0)} d_2^{max(N-k,0)} - K\right) \end{aligned}$$

B3. Τέλος, η τιμολόγηση του δικαιώματος, γίνεται προχωρώντας οπισθοδρομικά ως εξής:

$$\begin{aligned} C_{i,j,k} = e^{-r\delta t}(&P_1 C_{i+1,j+2,k+2} + P_2 C_{i+1,j+2,k} \\ &+ P_3 C_{i+1,j,k} + P_4 C_{i+1,j,k+2} + P_5 C_{i+1,j+1,k+1}) \end{aligned}$$

μέχρι να φτάσουμε στην τιμή $C_{0,0,0}$, το οποίο αποτελεί την τιμή του δικαιώματος σήμερα.

Παράδειγμα 10. *Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης αγοράς (European Call Spread), γραμμένο πάνω σε δύο μετοχές, με τα εξής χαρακτηριστικά: αρχική τιμή $S_1 = 40$ και $S_2 = 40$ ευρώ, τιμή εξάσκησης $K = 10$ ευρώ, λήξη σε $T = 7/12$ του χρόνου, ετήσιο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο $r = 0.1$, μεταβλητότητα $\sigma_1 = 0.2$ και $\sigma_2 = 0.3$ αντίστοιχα, συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho = 0.5$ και $N = 1$ περίοδο. Επίσης $\delta t = T/N = (7/12)/1 = 0.583$. Επίσης οι τιμές των παραμέτρων $u_1 = 1.1862$, $u_2 = 1.2920$, $d_1 = 0.8430$ και $d_2 = 0.7740$. Οι τιμές των πιθανοτήτων είναι $P_1 = 0.3996$, $P_2 = 0.1370$, $P_3 = 0.2004$, $P_4 = 0.0630$ και $P_5 = 0.200$. $\mu_1 = r - 0.5\sigma_1^2 = 0.08$, ενώ $\mu_2 = r - 0.5\sigma_2^2 = 0.055$. $e^{-r\delta t} = 0.9433$.*

Η τιμή των μετοχών S_1 και S_2 στο χρόνο λήξης υπολογίζεται σύμφωνα με το B1 και μπορεί να πάρει για $N = 1$ τις παρακάτω τιμές:

$$S^1_{(1,1,1)} = S^1_0 u_1^0 d_1^0 = 40 \quad S^2_{(1,1,1)} = S^2_0 u_2^0 d_2^0 = 40$$

$$\begin{aligned} S^1_{(1,0,2)} &= S^1_0 u_1^0 d_1^1 = 33.7202 \quad S^2_{(1,0,2)} = S^2_0 u_2^1 d_2^0 = 51.6790 \\ S^1_{(1,0,0)} &= S^1_0 u_1^0 d_1^1 = 33.7202 \quad S^2_{(1,0,0)} = S^2_0 u_2^0 d_2^1 = 30.9603 \\ S^1_{(1,2,0)} &= S^1_0 u^1 d_1^0 = 47.4493 \quad S^2_{(1,0,0)} = S^2_0 u_2^0 d_2^1 = 30.9603 \\ S^1_{(1,2,2)} &= S^1_0 u^1 d_1^0 = 47.4493 \quad S^2_{(1,2,2)} = S^2_0 u_2^1 d_2^0 = 51.6790 \end{aligned}$$

Η τιμή του δικαιώματος στο χρόνο λήξης υπολογίζεται υπολογίζεται βάσει το B2 και μπορεί να πάρει για $N = 1$ τις παρακάτω τιμές:

$$\begin{aligned} C_{1,1,1} &= max\left(0, S^1_{(1,1,1)} - S^2_{(1,1,1)} - K\right) \\ &= max(40 - 40 - 10, 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,0,2} &= max\left(0, S^1_{(1,0,2)} - S^2_{(1,0,2)} - K\right) \\ &= max(33.7202 - 51.6790 - 10, 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,0,0} &= max\left(0, S^1_{(1,0,0)} - S^2_{(1,0,0)} - K\right) \\ &= max(33.7202 - 30.9603 - 10, 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,2,0} &= max\Big(0, S^1_{(1,2,0)} - S^2_{(1,2,1)} - K\Big) \\ &= max(47.4493 - 30.9603 - 10, 0) = 6.4890 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,2,2} &= max\Big(0, S^1_{(1,1,1)} - S^2_{(1,1,1)} - K\Big) \\ &= max(47.4493 - 51.6790 - 10, 0) = 0 \end{aligned}$$

Από εδώ και έπειτα, πηγαίνουμε αναδρομικά, μέχρι να φτάσουμε στην αρχική τιμή του δικαιώματος (από το τέλος προς την αρχή του δέντρου) και υπολογίζουμε σε κάθε κόμβο τις πιθανές τιμές του δικαιώματος βάσει του Β3:

$$\begin{aligned} C_{i,j,k} = e^{-r\delta t}(&P_1 C_{i+1,j+2,k+2} + P_2 C_{i+1,j+2,k} \\ &+ P_3 C_{i+1,j,k} + P_4 C_{i+1,j,k+2} + P_5 C_{i+1,j+1,k+1}) \end{aligned}$$

μέχρι το χρόνο $T = 0$ *(από το τέλος προς την αρχή του δέντρου) ως εξής:*

$$\begin{aligned} C_{0,0,0} &= e^{-r\delta t}(P_1 C_{i+1,j+2,k+2} + P_2 C_{i+1,j+2,k} \\ &+ P_3 C_{i+1,j,k} + P_4 C_{i+1,j,k+2} + P_5 C_{i+1,j+1,k+1}) \\ &= e^{-r\delta t}\left(P_1 C_{1,2,2} + P_2 C_{1,2,0} + P_3 C_{1,0,0} + P_4 C_{1,0,2} + P_5 C_{1,1,1}\right) \\ &= 0.9433 \cdot (0.3996 \cdot 0 + 0.1370 \cdot 6.4890 + 0.2004 \cdot 0 + 0.0630 \cdot 0 + 0.2000 \cdot 0) \\ &= 0.8386 \end{aligned}$$

καταλήγουμε τελικά πως το $C_{0,0,0}$*, αποτελεί την δίκαιη τιμή τιμολόγησης του δικαιώματος στον χρόνο* $t = 0$.

Παράδειγμα 11. *Έστω πως έχουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης αγοράς (European Call Spread), γραμμένο πάνω σε δύο μετοχές, με τα εξής χαρακτηριστικά: αρχική τιμή* $S_1 = 40$ *και* $S_2 = 40$ *ευρώ, τιμή εξάσκησης* $K = 10$ *ευρώ, λήξη σε* $T = 7/12$ *του χρόνου, ετήσιο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο* $r = 0.1$*, μεταβλητότητα* $\sigma_1 = 0.2$ *και* $\sigma_2 = 0.3$ *αντίστοιχα, συντελεστή αυτοσυσχέτισης* $\rho = 0.5$ *και* $N = 2$ *περίοδοι. Επίσης* $\delta t = T/N = (7/12)/2 = 0.291$. $\mu_1 = r - 0.5\sigma_1^2 = 0.08$*, ενώ* $\mu_2 = r - 0.5\sigma_2^2 = 0.055$. *(Παραπομπες.) Επίσης οι τιμές των παραμέτρων* $u_1 = 1.1284$*,* $u_2 = 1.1986$*,* $d_1 = 0.8862$ *και* $d_2 = 0.8343$. $e^{-r\delta t} = 0.9713$. *Οι τιμές των πιθανοτήτων είναι* $P_1 = 0.3704$*,* $P_2 = 0.1262$*,* $P_3 = 0.2296$*,* $P_4 = 0.0738$ *και* $P_5 = 0.200$.

Η τιμή της μετοχής S_1 *υπολογίζεται βάσει του Β1 και μπορεί να πάρει για* $N = 2$ *τις παρακάτω τιμές:*

$$S^1_{(2,0,2)} = S^1_0 u^0_1 d^2_1 = 31.4173 \quad S^1_{(2,0,4)} = S^1_0 u^0_1 d^2_1 = 31.4173$$
$$S^1_{(2,0,0)} = S^1_0 u^0_1 d^2_1 = 31.4173$$

$$S^1_{(2,1,1)} = S^1_0 u^0_1 d^1_1 = 35.4498 \quad S^1_{(2,2,0)} = S^1_0 u^0_1 d^0_1 = 40.0000$$
$$S^1_{(2,3,1)} = S^1_0 u^1_1 d^0_1 = 45.1342 \quad S^1_{(2,4,0)} = S^1_0 u^2_1 d^0_1 = 50.9274$$
$$S^1_{(2,1,3)} = S^1_0 u^0_1 d^1_1 = 35.4498 \quad S^1_{(2,2,2)} = S^1_0 u^0_1 d^0_1 = 40.0000$$

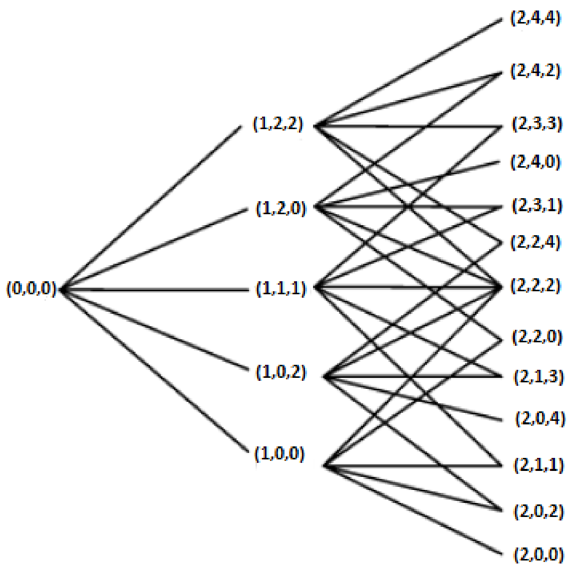
$$S^1_{(2,2,4)} = S^1_0 u^0_1 d^0_1 = 40.0000 \quad S^1_{(2,4,2)} = S^1_0 u^2_1 d^0_1 = 50.9274$$
$$S^1_{(2,3,3)} = S^1_0 u^1_1 d^0_1 = 45.1342 \quad S^1_{(2,4,4)} = S^1_0 u^2_1 d^0_1 = 50.9274$$

Η τιμή της μετοχής S_2 υπολογίζεται βάσει του Β1 και μπορεί να πάρει για $N = 2$ τις παρακάτω τιμές:

$$S^2_{(2,0,2)} = S^2_0 u^0_2 d^0_2 = 40.0000 \quad S^2_{(2,0,4)} = S^2_0 u^2_2 d^0_2 = 57.4642$$
$$S^2_{(2,0,0)} = S^2_0 u^0_2 d^2_0 = 27.8434$$

$$S^2_{(2,1,1)} = S^2_0 u^0_2 d^1_2 = 33.3727 \quad S^2_{(2,2,0)} = S^2_0 u^0_2 d^2_2 = 27.8434$$
$$S^2_{(2,3,1)} = S^2_0 u^0_2 d^1_2 = 33.3727 \quad S^2_{(2,4,0)} = S^2_0 u^0_2 d^2_2 = 27.8434$$
$$S^2_{(2,1,3)} = S^2_0 u^1_2 d^0_2 = 47.9434 \quad S^2_{(2,2,2)} = S^2_0 u^0_2 d^0_2 = 40.0000$$

$$S^2_{(2,2,4)} = S^2_0 u^2_2 d^0_2 = 57.4642 \quad S^2_{(2,4,2)} = S^2_0 u^0_2 d^0_2 = 40.0000$$
$$S^2_{(2,3,3)} = S^2_0 u^1_2 d^0_2 = 47.9434 \quad S^2_{(2,4,4)} = S^2_0 u^2_2 d^0_2 = 57.4642$$



Σχήμα 6.3: Τριωνυμικό δένδρο δύο μετοχών δύο χρονικών βημάτων

Η τιμή του δικαιώματος στο χρόνο λήξης υπολογίζεται βάσει του Β2 και μπορεί να πάρει για $N = 2$ τις παρακάτω τιμές:

$$\begin{aligned} C_{2,0,0} &= max\left(0, S^1_{(2,0,0)} - S^2_{(2,0,0)} - K\right) \\ &= max(31.4173 - 27.8434 - 10, 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2,0,2} &= max\left(0, S^1_{(2,0,2)} - S^2_{(2,0,2)} - K\right) \\ &= max(31.4173 - 40 - 10, 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2,1,1} &= max\left(0, S^1_{(2,1,1)} - S^2_{(2,1,1)} - K\right) \\ &= max(35.4498 - 33.3727 - 10, 0) = 0 \end{aligned}$$

$$C_{2,2,0} = max\left(0, S^1_{(2,2,0)} - S^2_{(2,2,0)} - K\right)$$
$$= max(40 - 27.8434 - 10, 0) = 2.1566$$

$$C_{2,2,2} = max\left(0, S^1_{(2,2,2)} - S^2_{(2,2,2)} - K\right)$$
$$= max(40 - 40 - 10, 0) = 0$$

$$C_{2,0,4} = max\left(0, S^1_{(2,0,4)} - S^2_{(2,0,4)} - K\right)$$
$$= max(31.4173 - 57.4642 - 10, 0) = 0$$

$$C_{2,1,3} = max\left(0, S^1_{(2,1,3)} - S^2_{(2,1,3)} - K\right)$$
$$= max(35.4498 - 47.9434 - 10, 0) = 0$$

$$C_{2,2,4} = max\left(0, S^1_{(2,2,4)} - S^2_{(2,2,4)} - K\right)$$
$$= max(40 - 57.4642 - 10, 0) = 0$$

$$C_{2,3,1} = max\left(0, S^1_{(2,3,1)} - S^2_{(2,3,1)} - K\right)$$
$$= max(45.1342 - 33.3727 - 10, 0) = 1.7615$$

$$C_{2,3,3} = max\left(0, S^1_{(2,3,3)} - S^2_{(2,3,3)} - K\right)$$
$$= max(45.1342 - 47.9434 - 10, 0) = 0$$

$$C_{2,4,0} = max\left(0, S^1_{(2,4,0)} - S^2_{(2,4,0)} - K\right)$$
$$= max(50.9274 - 27.8434 - 10, 0) = 13.084$$

$$C_{2,4,2} = max\left(0, S^1_{(2,4,2)} - S^2_{(2,4,2)} - K\right)$$
$$= max(50.9274 - 40 - 10, 0) = 0.9274$$

$$C_{2,4,4} = max\left(0, S^1_{(2,4,4)} - S^2_{(2,4,4)} - K\right)$$
$$= max(50.9274 - 57.4642 - 10, 0) = 0$$

Από εδώ και έπειτα, πηγαίνουμε αναδρομικά μέχρι να φτάσουμε στην αρχική τιμή του δικαιώματος (από το τέλος προς την αρχή του δέντρου) και βάσει του B3, για $N = 2$ μπορούμε να πάρουμε τις παρακάτω τιμές:

$$C_{i,j,k} = e^{-r\delta t}(P_1 C_{i+1,j+2,k+2} + P_2 C_{i+1,j+2,k}$$
$$+ P_3 C_{i+1,j,k} + P_4 C_{i+1,j,k+2} + P_5 C_{i+1,j+1,k+1})$$

και μπορεί να πάρει τις παρακάτω τιμές:

$$\begin{aligned} C_{1,1,1} &= 0.9713 \cdot (0.3704 \cdot 0 + 0.1262 \cdot 2.1566 + 0.2269 \cdot 0 + 0.0738 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0) \\ &= 0.2643 \end{aligned}$$

$$C_{1,0,2} = 0.9713 \cdot (0.3704 \cdot 0 + 0.1262 \cdot 0 + 0.2269 \cdot 0 + 0.0738 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0) = 0$$

$$\begin{aligned} C_{1,0,0} &= 0.9713 \cdot (0.3704 \cdot 0 + 0.1262 \cdot 1.7615 + 0.2269 \cdot 0 + 0.0738 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0) \\ &= 0.2159 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,2,0} = {} & 0.9713 \cdot (0.3704 \cdot 0.9274 + 0.1262 \cdot 13.084 + 0.2269 \cdot 1.7615 + 0.0738 \cdot 0 \\ & + 0.2 \cdot 2.1566) = 2.7600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,2,2} &= 0.9713 \cdot (0.3704 \cdot 0 + 0.1262 \cdot 0.9274 + 0.2269 \cdot 0 + 0.0738 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0) \\ &= 0.1136 \end{aligned}$$

Τελικά,

$$\begin{aligned} C_{0,0,0} = {} & 0.9713 \cdot (0.3704 \cdot 0.1136 + 0.1262 \cdot 2.7600 + 0.2269 \cdot 0.2159 + 0.0738 \cdot 0 \\ & + 0.2 \cdot 0.2643) = 0.4799 \end{aligned}$$

καταλήγουμε πως το $C_{0,0,0}$, αποτελεί την δίκαιη τιμή τιμολόγησης του δικαιώματος στον χρόνο $t = 0$.

Παρατήρηση 16. *Στην περίπτωση που το παραπάνω δικαίωμα ήταν Αμερικάνικο (American Call Spread) για να κάναμε τιμολόγηση με το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων, θα εξετάζαμε σε κάθε κόμβο του δένδρου αν μας συμφέρει να εξασκήσουμε το δικαίωμα ή να το κρατήσουμε και να συνεχίσουμε προς τα πίσω τη διαδικασία. Συνοπτικά, εξετάζουμε στον κόμβο (i, j, k):*

- *Αν εξασκηθεί το δικαίωμα, η αξία του (απόδοση) είναι ίση με το μέγιστο μεταξύ του μηδενός και της ποσότητας $S^1_{(i,j,k)} - S^2_{(i,j,k)} - K$, δηλαδή $max\left(0, S^1_{(i,j,k)} - S^2_{(i,j,k)} - K\right)$.*
- *Αν δεν εξασκηθεί το δικαίωμα, τότε η αξία του υπολογίζεται ως εξής:*

$$C_{i,j,k} = e^{-r\delta t}(P_1 C_{i+1,j+2,k+2} + P_2 C_{i+1,j+2,k} + P_3 C_{i+1,j,k} + P_4 C_{i+1,j,k+2} + P_5 C_{i+1,j+1,k+1}).$$

Για να εξετάσουμε αν μας συμφέρει ή όχι η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος στον κόμβο (i, j, k), συγκρίνουμε τις δύο παραπάνω τιμές. Αν η πρώτη τιμή υπερτερεί της δεύτερης μας συμφέρει η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος (μιας και στον κόμβο αυτό η εξάσκηση δημιουργεί μεγαλύτερη αξία). Αντίθετα, αν η δεύτερη τιμή υπερτερεί της πρώτης, τότε η πρόωρη εξάσκηση δεν μας συμφέρει (το δικαίωμα δεν συμφέρει να εξασκηθεί πρόωρα σε αυτόν τον κόμβο). Ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς δεν συμφέρει ποτέ να εξασκηθεί πριν την λήξη, άρα η αξία του θα είναι ίδια με αυτή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Συνοπτικά, η αξία του American Call Spread στον κόμβο (i, j, k) δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} C_{i,j,k} = {} & max[e^{-r\delta t}(P_1 C_{i+1,j+2,k+2} + P_2 C_{i+1,j+2,k} \\ & + P_3 C_{i+1,j,k} + P_4 C_{i+1,j,k+2} + P_5 C_{i+1,j+1,k+1}), max(0, S^1_{(i,j,k)} - S^2_{(i,j,k)} - K)], \end{aligned}$$

ενώ για American Put Spread δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} C_{i,j,k} = {} & max[e^{-r\delta t}(P_1 C_{i+1,j+2,k+2} + P_2 C_{i+1,j+2,k} \\ & + P_3 C_{i+1,j,k} + P_4 C_{i+1,j,k+2} + P_5 C_{i+1,j+1,k+1}), max(0, K - S^1_{(N,j,k)} - S^2_{(N,j,k)})]. \end{aligned}$$

6.3 Βασικά σημεία κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε έναν ακόμα τρόπο τιμολόγησης δικαιωμάτων γραμμένα σε παραπάνω από μία μετοχές (εδώ εξετάσαμε την περίπτωση των δύο μετοχών), γνωστό και ως υπόδειγμα πέντε αλμάτων, όπως παρουσιάστηκε από τους Kamrad & Ritchken [24]. Το υπόδειγμα αυτό δεν είναι τίποτα άλλο παρά μία άμεση επέκταση του τριωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης όταν το δικαίωμα που θέλουμε να τιμολογήσουμε είναι γραμμένο πάνω σε δύο υποκείμενους τίτλους. Όπως είδαμε η βασική φιλοσοφία του είναι ίδια με αυτή του υποδείγματος τεσσάρων αλμάτων που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, με την διαφορά πως τώρα σε κάθε χρονική στιγμή, λαμβάνουμε υπόψην και ένα οριζόντιο άλμα που αντιστοιχεί στην πιθανότητα οι δύο μετοχές να παραμείνουν αμετάβλητες. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάσαμε:

- Την μαθηματική φιλοσοφία του υποδείγματος των πέντε αλμάτων.
- Την αλγοριθμική προσέγγιση ώστε να κάνουμε τιμολόγηση με το υπόδειγμα αυτό.
- Κάποια αριθμητικά παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση του υποδείγματος.

7

Αριθμητική μελέτη του υποδείγματος των τεσσάρων και πέντε αλμάτων

Ο στόχος της παρούσας ενότητας είναι η αριθμητική μελέτη της συμπεριφοράς των υποδειγμάτων τιμολόγησης των τεσσάρων και πέντε αλμάτων που παρουσιάστηκαν στα δύο προηγούμενα κεφάλαια. Η μελέτη αυτή θα γίνει σε διπλή βάση: αφενός συγκρίνοντας τα υποδείγματα μεταξύ τους και αφαιτέρου συγκρίνοντάς τα έχοντας ως γνώμονα την τιμολόγηση με βάση την προσομοίωση Monte-Carlo. Ο λόγος που θα γίνει αυτό, είναι γιατί στην συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων δεν υπάρχει κλειστή μορφή τιμολόγησης δικαιωμάτων γραμμένα σε παραπάνω από μία μετοχές. Η τιμολόγηση με την προσομοίωση Monte-Carlo αποτελεί ίσως την πιο κοινώς αποδεκτή μεθοδολογία τιμολόγησης δικαιωμάτων (τόσο Ευρωπαϊκού τύπου, αλλά κυρίως εξωτικού) και η φιλοσοφία της οποίας είναι πως η τιμή τιμή του δικαιώματος μπορεί να εκφραστεί ως η προεξοφλημένη μέση τιμή των μελλοντικών χρηματοροών κάτω από ένα (κατάλληλο) ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο μέτρο πιθανότητας. Το μέτρο αυτό κατασκευάζεται από τις ουδέτερες ως προς τον κίνδυνο πιθανότητες. Για να κάνουμε τιμολόγηση ενός δικαιώματος (εδώ Ευρωπαϊκού τύπου) με την προσομοίωση Monte-Carlo θα πρέπει καταρχάς να υιοθετήσουμε ένα μαθηματικό υπόδειγμα σύμφωνα με το οποίο εξελίσσονται οι τιμές των μετοχών αυτών στον χρόνο. Κατόπιν, μέσω τεχνικών προσομοίωσης, θα γεννήσουμε πάρα πολλά σενάρια για τις τελικές τιμές των μετοχών και κατόπιν μέσα στο πλαίσιο της ουδετερότητας ως προς τον κίνδυνο, η τιμή του δικαιώματος θα είναι η προεξοφλημένη μέση τιμή των τελικών τιμών των μετοχών (ανάλογα βέβαια με την συνάρτηση απόδοσης του δικαιώματος που έχουμε). Στην παρούσα εργασία δεν θα γίνει αναφορά στην μεθοδολογία Monte Carlo, αλλά βασιστήκαμε σε αυτά που διδαχθήκαμε από το μάθημα Προσομοίωση Χρημτοοικονομικών Σεναρίων και στις σημειώσεις του μαθήματος βλ. Μπαλτάς [7]. Για περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με την μεθοδολογία Monte Carlo και την εφαρμογή της στο πλαίσιο τιμολόγησης δικαιωμάτων, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να διαβάσει το Κεφάλαιο 4 στον Brandimarte [14]), το Κεφάλαιο 4 σους Clewlow & Strickland [25] ή το Κεφάλαιο 8 στον Haug [21].

Επειδή η διαδικασία πάνω στην οποία θα βασιστούμε για την προσομοιωση Monte-Carlo είναι η γεωμετρική κίνηση Brown, διαισθητικά θα περιμένουμε τόσο το υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων όσο και το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων να συγκλίνουν στο αποτέλεσμα της Monte-Carlo. Μάλιστα, η σύγκλιση αυτή γίνεται με έναν πολύ συγκεκριμένο τρόπο (σύγκλιση σε κατανομή) αλλά δεν θα πούμε εδώ περισσότερα καθώς το θέμα αυτό ξεφεύγει από τον σκοπό της εργασίας αυτής. Πιο συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο αυτό:

- Έχοντας ως σημείο αναφοράς την μεθοδολογία Monte Carlo, θα εξετάσουμε αριθμητικά την συμπεριφορά, συμπεριλαμβανομένης και της ταχύτητας σύγκλισης, τόσο του υποδείγματος τεσσάρων όσο και των πέντε αλμάτων, σε ένα πεδίο δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου.

- Θα εξετάσουμε την συμπεριφορά (ευαισθησία) των υποδειγμάτων αυτών συνατρήσει των διαφόρων υποκείμενων παραμέτρων τους (σ, r, T, N, λ). Η μελέτη αυτή θα γίνει βάσει της σύγκρισης των αποτελεσμάτων τους ως προς το αποτέλεσμα της μεθοδολογίας Monte Carlo αλλά και της μεταξύ τους απόστασης.

Σε ό,τι ακολουθεί όπου $B.E.G.$ εννοείται υπόδειγμα τιμολόγησης τεσσάρων αλμάτων δικαιωμάτων, όπου $K.R.$ εννοείται υπόδειγμα τιμολόγησης πέντε αλμάτων, ενώ όπου M.C. εννοείται Monte Carlo. Η μπλε γραμμή συμβολίζει το $B.E.G.$, η κόκκινη το $K.R.$ Τέλος, ο όρος απόσταση συμβολίζει την διαφορά στις τιμές μεταξύ των υποδειγμάτων.

7.1 European Call on Maximum

Στην παράγραφο που ακολουθεί, θα εξετάσουμε μια συγκεκριμένη περίπτωση ενός δικαιώματος προαίρεσης αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου γραμμένου σε δύο μετοχές που δεν πληρώνουν μέρισμα. Το δικαίωμα αυτό είναι το Call on Maximum of two assets, με απόδοση $\max\left[\max(S_1(T), S_2(T)) - K, 0\right]$. Το συμβόλαιο αυτό δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να αγοράσει την μέγιστη των δύο μετοχών, στην λήξη, στην τιμή που έχει συμφωνηθεί. Σε ό,τι ακολουθεί θεωρούμε ότι $\rho = 0.5$.

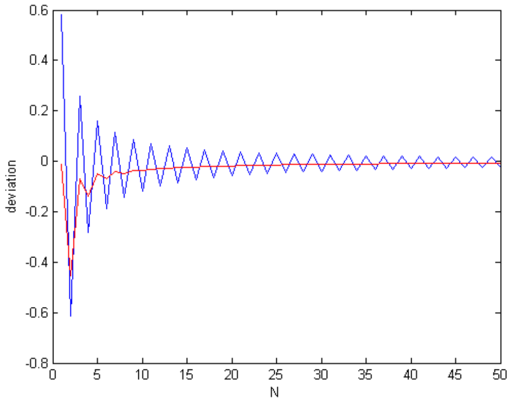
7.1.1 Συμπεριφορά του υποδείγματος πέντε αλμάτων για διαφορετικές τιμές του λ

Πίνακας 7.1: Τιμές του υποδείγματος τιμολόγησης πέντε αλμάτων δικαιωμάτων και διαφορά από την εκτίμηση της τιμής του δικαιώματος με την προσομοίωση Monte-Carlo για διάφορα λ. $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $r = 0.04879$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, $T = 7/12$, $N = 50$, $M = 1000000$ τα μονοπάτια της Monte-Carlo. (Η τιμή του υποδείγματος τεσσάρων αλμάτων τιμολόγησης είναι 5.47017 και η τιμή της Monte Carlo είναι 5.48772).

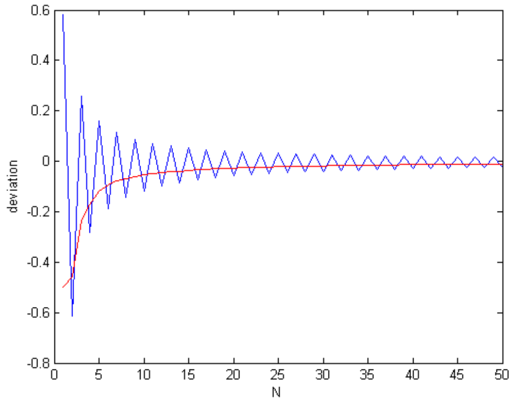
Eu Call On Max		
λ	$K.R.$	Απόσταση $K.R.$ από M.C.
1.0	5.4701	0.0175
1.2	5.4802	0.0075
1.4	5.4737	0.0139
1.6	5.4662	0.0215
1.8	5.4576	0.0300
2.0	5.4480	0.0396
1.11803	5.4825	0.0051

Στον Πίνακα 7.1 παρουσιάζονται οι τιμές του υποδείγματος πέντε αλμάτων για διάφορες τιμές λ και η απόστασή τους από την τιμή που μας δίνει η μεθοδολογία Monte Carlo. Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε την συμπεριφορά του υποδείγματος τιμολόγησης πέντε αλμάτων για την περίπτωση του European Call on Max, για διάφορες τιμές λ, έχοντας ως σημείο αναφοράς την μεθοδολογία τιμολόγησης Monte Carlo. Καταρχάς, από την εξίσωση 6.13 παρατηρούμε πως καθώς το λ μεταβάλλεται, παίρνουμε διαφορετικές τιμές για την τιμή του δικαιώματος με βάση το υπόδειγμα πέντε αλμάτων, εφόσον για κάθε μία τιμή του λ θα αλλάζουν οι πιθανότητες P_1, P_2, P_3, P_4 και P_5. Καθώς μεταβάλλεται το λ, παίρνουμε διαφορετικές αποστάσεις από την τιμή που μας δίνει η μεθοδολογία Monte Carlo. Για τιμές $\lambda < 1$, δεν γίνεται αναφορά μιας και η πιθανότητα οριζοντίου βήματος P_5 βγαίνει αρνητική. Στην εργασία αυτή θα ακολουθήσουμε τους Kamrad & Ritchken [24] οι οποίοι εκτίμησαν πως το $\lambda = 1.11803$ φαίνεται να είναι μία καλή τιμή για δικαιώματα γραμμένα σε δύο τίτλους, επειδή για την τιμή αυτή κατά μέσο όρο πήραν τις μικρότερες διαφορές από την τιμή που δίνει η μεθοδολογία Monte Carlo για το ίδιο δικαίωμα. Η τιμή αυτή του λ αντιστοιχεί στην πιθανότητα οριζοντίου άλματος $P_5 = 0.2$. Πράγματι, παρατηρούμε πως για μια τιμή του λ κοντά στο 1.1 παίρνουμε και την μικρότερη απόσταση από το B.S. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μια πρόχειρη επαλήθευση του ισχυρισμού των Kamrad & Ritchken [24].

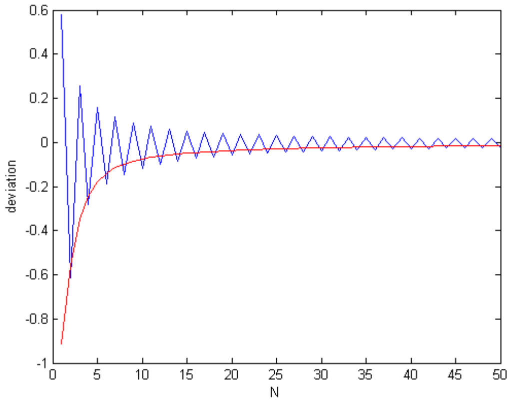
7.1.2 Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte-Carlo καθώς μεταβάλλεται το N και το λ.



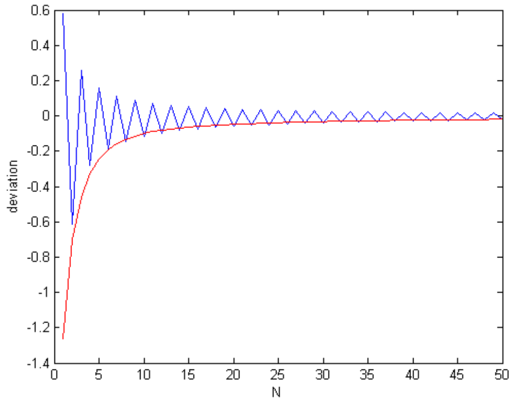
(α′) $\lambda = 1.1$



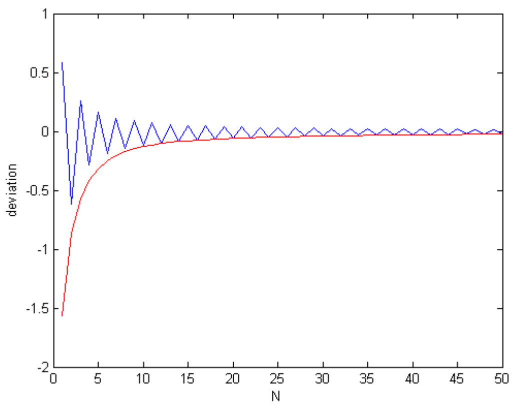
(β′) $\lambda = 1.2$



(γ′) $\lambda = 1.3$



(δ′) $\lambda = 1.4$



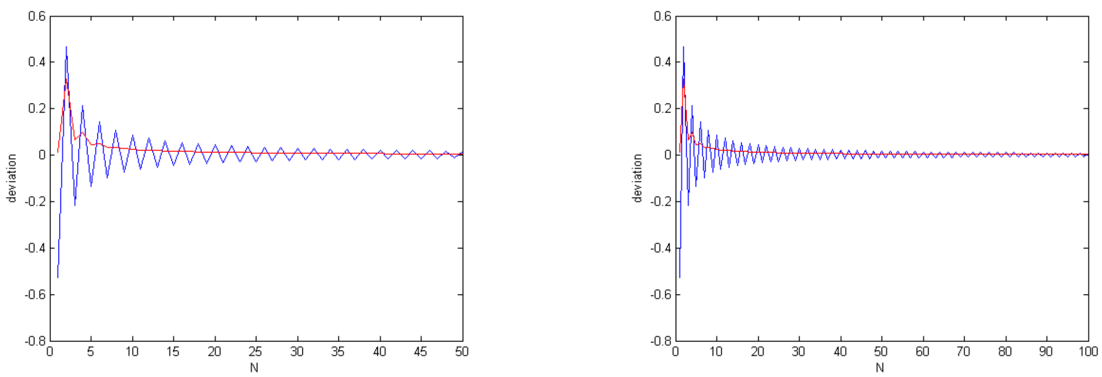
(ε′) $\lambda = 1.5$

Σχήμα 7.1: Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte Carlo, $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $r = 0.04879$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, $T = 1$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo και λ μεταβλητό.

Αφού εξετάσαμε πως συμπεριφέρεται το υπόδειγμα πέντε αλμάτων ως προς τις διαφορετικές τιμές του λ, τώρα θα εξετάσουμε την ταχύτητα σύγκλισης και των δύο υποδειγμάτων. Το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων έχει πλεονέκτημα έναντι του υποδείγματος των τεσσάρων αλμάτων, μιας και λαμβάνει υπόψιν μία ακόμα κατάσταση που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο οι δύο μετοχές να παραμείνουν αμετάβλητες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να παράγει περισσότερες τιμές σε κάθε περίοδο (άρα και περισσότερα τελικά σενάρια) και για το λόγο αυτό περιμένουμε διαισθητικά το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων να προσεγγίζει γρηγορότερα την τιμή Monte-Carlo από ότι το υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων. Από το Σχήμα 7.1 φαίνεται πως το υπόδειγμα πέντε αλμάτων για μία τιμή του λ κοντά στο 1.1, συγκλίνει πιο γρήγορα και πιο ομαλά από το τεσσάρων αλμάτων στην τιμή Monte-Carlo. Μάλιστα, το αποτέλεσμα του διωνυμικού υποδείγματος με περίπου 50 επαναλήψεις μπορεί να συγκριθεί με το αποτέλεσμα του τριωνυμικού υποδείγματος με περίπου δέκα με δεκαπέντε επαναλήψεις. Επομένως, η πρόταση των Kamrad & Ritchken [24] για το λ φαίνεται να επαληθεύεται τουλάχιστον οπτικά. Σε κάθε περίπτωση αναφορικά με την τιμή του λ, το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων φαίνεται να συγκλίνει πιο ομαλά από το υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων στην τιμή Monte-Carlo. Καθώς όμως αυξάνεται το λ (πάνω από την τιμή $\lambda = 1.2$) η ταχύτητα σύγκλισης μειώνεται. Το αποτέλεσμα αυτό είναι άλλη μια πρόχειρη επαλήθευση του ισχυρισμού των Kamrad & Ritchken [24].

7.1.3 Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte-Carlo καθώς αυξάνεται το N

Προηγουμένως είδαμε τι συμβαίνει στα υποδείγματα καθώς αλλάζει το λ (για το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων) για έναν αριθμό επαναλήψεων μέχρι και την τιμή $N = 50$. Εδώ θα διατηρήσουμε σταθερό το λ (για το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων) και θα θεωρήσουμε διαφορετικές περιπτώσεις για το N. Θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή που πήραν οι Kamrad & Ritchken, για $\lambda = 1.11803$.



(α′) (β′)

Σχήμα 7.2: Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte Carlo, για $r = 0.04879$, $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$, $\sigma_1 = 0.2$ $\sigma_2 = 0.3$ $T = 7/12$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo.

Στο Σχήμα 7.2, βλέπουμε τις τιμές του υποδείγματος των τεσσάρων και πέντε αλμάτων και την απόστασή τους από την τιμή Monte-Carlo. Παρατηρούμε πως οι τιμές του υποδείγματος των πέντε αλμάτων προσεγγίσουν γρηγορότερα και πιο ομαλά την τιμή της προσομοίωσης Monte-Carlo και μάλιστα η σύγκλιση και για τα δύο υποδείγματα φαίνεται βελτιώνεται καθώς ο αριθμός των N βημάτων αυξάνεται. Επίσης, στον Πίνακα 7.2 παρουσιάζονται οι τιμές υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων για $\lambda = 1.11803$ (το λ επηρεάζει μόνο τις τιμές το υποδείγματος πέντε αλμάτων) για διάφορες τιμές του N και η απόσταση αυτών από την τιμή Monte-Carlo. Το συμπέρασμα είναι το ίδιο: Καθώς το N μεγαλώνει η διαφορά και των δύο υποδειγμάτων από την τιμή Monte-Carlo πηγαίνει στο μηδέν και μάλιστα το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων συγκλίνει πιο γρήγορα.

Πίνακας 7.2: Τιμές υποδείγματος τιμολόγησης τεσσάρων και πέντε αλμάτων δικαιωμάτων για $\lambda = 1.11803$. $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $r = 0.04879$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$ $T = 7/12$, $M = 1000000$ τα βήματα της προσομοίωσης Monte-Carlo, καθώς το N μεταβάλλεται. (Η τιμή Monte Carlo είναι 5.4877)

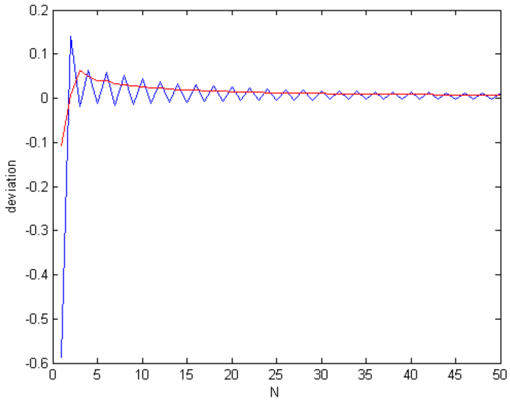
Eu Call On Max			Απόσταση *B.E.G.* και *K.R.* από M.C	
N	*B.E.G.*	*K.R.*	*B.E.G.*	*K.R.*
10	5.4011	5.4621	0.0865	0.0255
30	5.4584	5.4791	0.0292	0.0086
50	5.4701	5.4825	0.0175	0.0051
70	5.4752	5.4840	0.0125	0.0036
100	5.4790	5.4852	0.0087	0.0025

7.1.4 Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte-Carlo καθώς μεταβάλλεται το σ_1

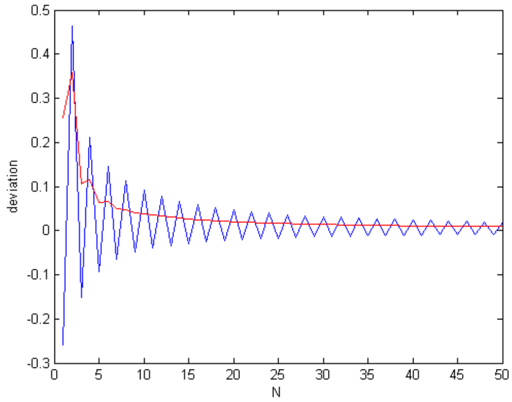
Στην παράγραφο αυτή θα διατηρήσουμε σταθερό το λ (για το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων) και θα αφήσουμε το σ_1 να μεταβάλλεται. Ο στόχος μας είναι να εξετάσουμε την ευαισθησία των αποτελεσμάτων και των δύο υποδειγμάτων (τεσσάρων και πέντε αλμάτων) ως προς τη μεταβλητότητα των τιμών της πρώτης υποκείμενης μετοχής (το συμπέρασμα είναι ίδιο αν αλλάζει το σ_2). Πάλι θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή που πήραν οι Kamrad & Ritchken, για $\lambda = 1.11803$. Στον Πίνακα 7.3, παραθέτουμε τις τιμές των δικαιωμάτων του υποδείγματος των τεσσάρων και πέντε αλμάτων και την απόστασή τους από την αντίστοιχη τιμή Monte-Carlo. Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως του επιπέδου του σ_1, η συμπεριφορά του υποδείγματος των τεσσάρων και πέντε αλμάτων δεν αλλάζει και είναι ίδια με αυτήν που είδαμε και προηγουμένως. Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως της τιμής του σ_1 η τιμή του υποδείγματος των πέντε αλμάτων είναι πιο κοντά στην τιμή Monte-Carlo από ότι είναι η τιμή υποδείγματος των τεσσάρων αλμάτων.

Πίνακας 7.3: Τιμές υποδείγματος τιμολόγησης τεσσάρων και πέντε αλμάτων δικαιωμάτων και απόσταση από την τιμή Monte Carlo, για διάφορα σ_1. $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$, $T = 7/12$, $r = 0.1$, $\sigma_2 = 0.3$ $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo, $N = 50$.

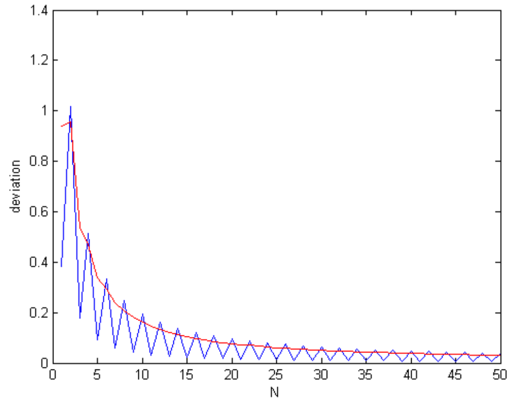
				ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ M.C.	
σ_1	*B.E.G.*	*K.R.*	M.C.	*B.E.G.*	*K.R.*
0,1	5.7537	5.7579	5.7651	0.0114	0.0072
0,2	6.2949	6.3056	6.3144	0.0194	0.0087
0,3	7.0990	7.1070	7.1373	0.0382	0.0303
0,4	8.0985	8.1142	8.1250	0.0264	0.0107



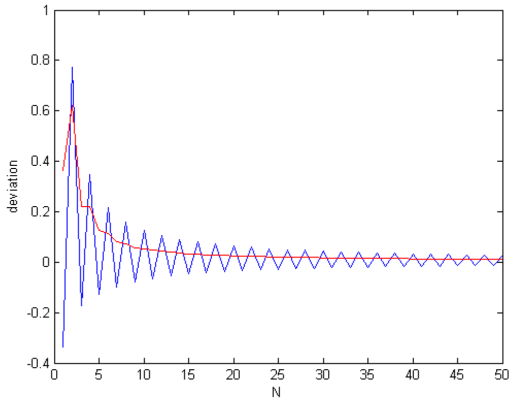
(α′) $\sigma_1 = 0.1$



(β′) $\sigma_1 = 0.2$



(γ′) $\sigma_1 = 0.3$



(δ′) $\sigma_1 = 0.4$

Σχήμα 7.3: Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte Carlo, για διάφορα σ_1, $r = 0.1$, $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$, $\sigma_2 = 0.3$ $T = 7/12$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo, $N = 50$.

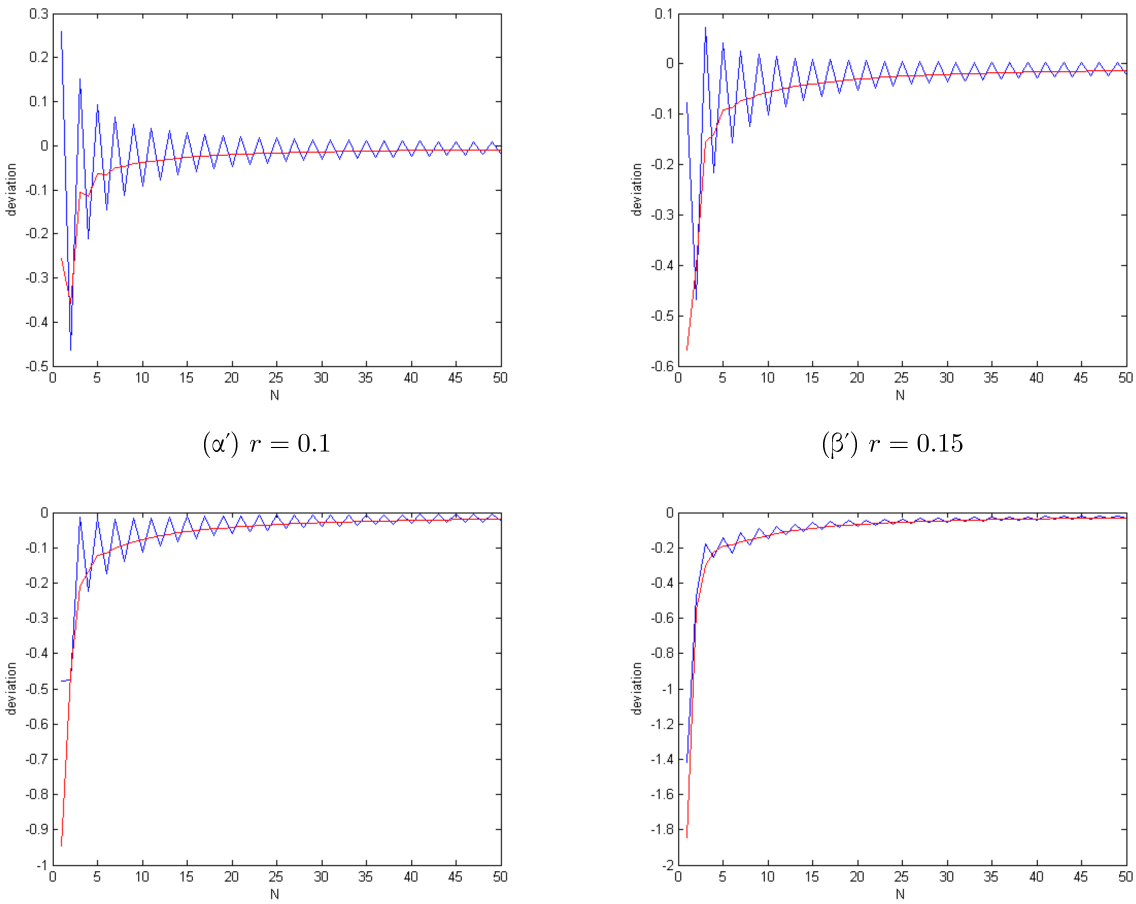
Τώρα, για να εξετάσουμε την ταχύτητα σύγκλισης των υποδειγμάτων θα αφήσουμε το N να παίρνει τιμές από το $N = 1$ μέχρι και το $N = 50$ και θα αφήσουμε πάλι το σ_1 να μεταβάλλεται. Στο Σχήμα 7.3, για το συγκεκριμένο λ, παρατηρούμε την απόσταση των τιμών των υποδειγμάτων των τεσσάρων και πέντε αλμάτων επίσης από την τιμή Monte-Carlo. Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως του επιπέδου του σ_1, η συμπεριφορά του υποδείγματος των πέντε αλμάτων και του υποδείγματος των τεσσάρων δεν αλλάζει όπως είδαμε και προηγουμένως. Παρατηρούμε πως οι τιμές του υποδείγματος πέντε αλμάτων προσεγγίζουν γρηγορότερα και πιο ομαλά αυτές της μεθοδολογίας M.C. από ότι το υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων.

7.1.5 Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte-Carlo καθώς μεταβάλλεται το r

Προηγουμένως είδαμε τι συμβαίνει στα υποδείγματα καθώς αλλάζει το λ, το σ_1. Εδώ θα διατηρήσουμε σταθερό το λ και θα αφήσουμε το r να μεταβάλλεται, ώστε να εξετάσουμε την ευαισθησία των αποτελεσμάτων ως προς το επιτόκιο δίχως κίνδυνο. Θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή που πήραν οι Kamrad & Ritchken, για $\lambda = 1.11803$. Θα εξετάσουμε ποιό από τα δύο υποδείγματα πηγαίνει γρηγορότερα στην τιμή M.C.

Πίνακας 7.4: Τιμές υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων τιμολόγησης δικαιωμάτων European Call On Max και απόσταση από την τιμή Monte Carlo, για διάφορα r, $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, $T = 7/12$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo, $N = 50$.

				ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ M.C.	
r	*B.E.G.*	*K.R.*	M.C.	*B.E.G.*	*K.R.*
0,1	6.2949	6.3056	6.3144	0.0194	0.0087
0,15	7.1379	7.1467	7.1601	0.0221	0.0133
0,2	8.0080	8.0151	8.0335	0.0254	0.0184
0,3	9.7912	9.7952	9.8247	0.0335	0.0295



(α′) $r = 0.1$ (β′) $r = 0.15$

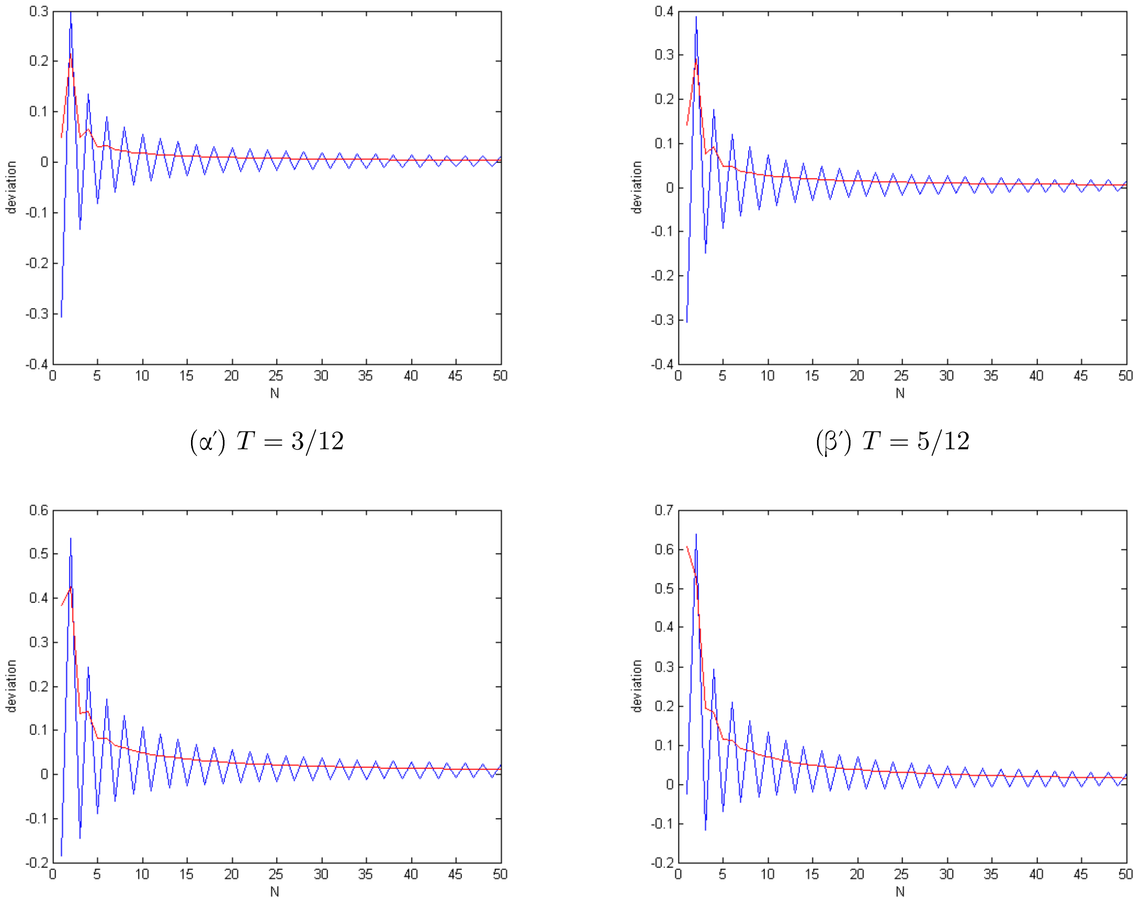
(γ′) $r = 0.2$ (δ′) $r = 0.3$

Σχήμα 7.4: Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte Carlo, για $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$ $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$ $T = 7/12$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo και r μεταβλητό.

Στον πίνακα 7.4, βλέπουμε τις τιμές των δικαιωμάτων των υποδειγμάτων των τεσσάρων και πέντε αλμάτων και την απόστασή τους από την τιμή Monte-Carlo καθώς το r μεταβάλλεται. Επίσης, στο Σχήμα 7.4, αφήνουμε το N να παίρνει τιμές από το $N = 1$ μέχρι και το $N = 50$ και πάλι το r να μεταβάλλεται και παρατηρούμε την απόσταση των τιμών των υποδειγμάτων των τεσσάρων και πέντε αλμάτων επίσης από την τιμή Monte-Carlo. Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως του επιπέδου του r, η συμπεριφορά του υποδείγματος των πέντε αλμάτων και του υποδείγματος των τεσσάρων δεν αλλάζει όπως είδαμε και προηγουμένως. Βλέπουμε πως το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων προσεγγίζει γρηγορότερα και πιο ομαλά από το υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων την τιμή M.C. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση $r = 0.3$ όπου και τα δύο υποδείγματα δείχνουν να συμπεριφέρονται το ίδιο, αλλά μια τέτοια τιμή του r θεωρείται πολύ μεγάλη για να εμφανίζεται στην πράξη.

7.1.6 Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte-Carlo καθώς αυξάνεται το T

Προηγουμένως είδαμε τι συμβαίνει στα υποδείγματα καθώς μεταβάλλεται το σ_1 και το r. Εδώ θα διατηρήσουμε σταθερό το σ_1 και το r (θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή που πήραν οι Kamrad & Ritchken, για $\lambda = 1.11803$) και θα αφήσουμε το T να μεταβάλλεται, ώστε να εξετάσουμε την ευαισθησία των αποτελεσμάτων ως προς το χρόνο λήξης του δικαιώματος.



(α′) $T = 3/12$

(β′) $T = 5/12$

(γ′) $T = 9/12$

(δ′) $T = 1$

Σχήμα 7.5: Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte Carlo, $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$ $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$ $r = 0.1$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo και T μεταβλητό.

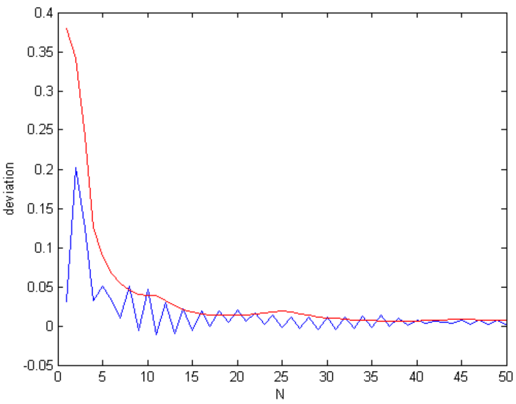
Πίνακας 7.5: Τιμές υποδείγματος τιμολόγησης τεσσάρων και πέντε αλμάτων και απόσταση από την τιμή Monte Carlo, για διάφορα T. $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, $r = 0.1$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo, $N = 50$.

				ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ M.C.	
T	$B.E.G.$	$K.R.$	M.C.	$B.E.G.$	$K.R.$
3/12	3.7523	3.7600	3.7641	0.0118	0.0040
5/12	5.1087	5.1181	5.1245	0.0157	0.0063
9/12	7.3786	7.3902	7.4016	0.0230	0.0114
1	8.8753	8.8880	8.90379	0.0284	0.0157

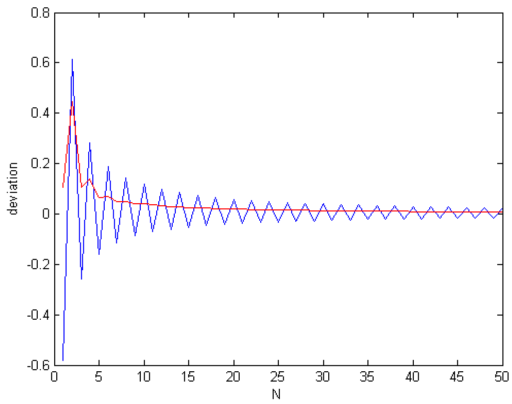
Στον Πίνακα 7.5, παραθέτουμε τις τιμές των δικαιωμάτων των υποδειγμάτων των τεσσάρων και πέντε αλμάτων και την απόστασή τους από την τιμή Monte-Carlo καθώς το T αυξάνεται (κάθε τιμή του T η προσομοίωση M.C. θα δίνει διαφορετική τιμή). Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως του επιπέδου του T, η συμπεριφορά του υποδείγματος των τεσσάρων και πέντε αλμάτων δεν αλλάζει και είναι ίδια με αυτήν που είδαμε και προηγουμένως. Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως της τιμής του T η τιμή του υποδείγματος των πέντε αλμάτων είναι πιο κοντά στην τιμή της Monte-Carlo από ότι είναι η τιμή του υποδείγματος των τεσσάρων αλμάτων. Για να εξετάσουμε την ταχύτητα σύγκλισης των υποδειγμάτων θα αφήσουμε πάλι το N να παίρνει τιμές από το $N = 1$ μέχρι και το $N = 50$ και θα αφήσουμε το T να μεταβάλλεται. Στο Σχήμα 7.5 (για το συγκεκριμένο λ που πρότειναν οι Kamrad & Ritchken [24]), παρατηρούμε την απόσταση των τιμών των δύο υποδειγμάτων από την τιμή Monte-Carlo. Βλέπουμε πως ανεξαρτήτως του επιπέδου του T, η συμπεριφορά του υποδείγματος των τεσσάρων και πέντε αλμάτων δεν αλλάζει όπως είδαμε και προηγουμένως: Το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων προσεγγίζει πιο γρήγορα και πιο ομαλά στην τιμή M.C. από ότι το υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων.

7.1.7 Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte-Carlo καθώς μεταβάλλεται το K.

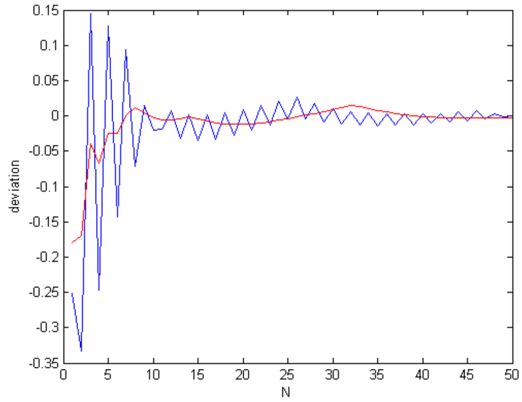
Προηγουμένως είδαμε τι συμβαίνει στα υποδείγματα καθώς μεταβάλλεται το σ_1, το r και το T. Εδώ θα διατηρήσουμε σταθερές τις παραμέτρους αυτές (θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή που πήραν οι Kamrad & Ritchken, για $\lambda = 1.11803$) και θα αφήσουμε το K να μεταβάλλεται, ώστε να εξετάσουμε την ευαισθησία των αποτελεσμάτων ως προς την τιμή εξάσκησης. Στο Σχήμα 7.6, παρουσιάζονται οι τιμές του υποδείγματος τιμολόγησης τεσσάρων και πέντε αλμάτων για $\lambda = 1.11803$, καθώς και η απόσταση αυτών από την τιμή Monte-Carlo. Για να εξετάσουμε την ταχύτητα σύγκλισης των υποδειγμάτων αφήνουμε πάλι το N να παίρνει τιμές από το $N = 1$ μέχρι και το $N = 50$ και το K να μεταβάλλεται. Θεωρούμε τρεις περιπτώσεις, μία ITM, μία ATM και μία OTM την χρονική στιγμή $t = 0$. Καταρχάς παρατηρούμε πως καθώς το N αυξάνεται, τόσο το υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων όσο και το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων συγκλίνουν στην τιμή Monte-Carlo. Μάλιστα, οι τιμές του υποδείγματος των πέντε αλμάτων προσεγγίζουν σε κάθε μία από τις περιπτώσεις γρηγορότερα και πιο ομαλά την τιμή Monte-Carlo συγκριτικά με το υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων.



(α′) $K = 35$



(β′) $K = 40$



(γ′) $K = 45$

Σχήμα 7.6: Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte Carlo, για $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $T = 1$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, $\rho = 0.5$, $r = 0.04879$, $M = 1000000$, $N = 50$, $\lambda = 1.11803$ και K μεταβλητό.

Παρατήρηση 17. Στο παράρτημα Β′ παραθέτουμε τα αποτελέσματα της αριθμητικής ανάλυσης για την περίπτωση που το παραπάνω δικαίωμα είναι πώλησης, δηλαδή στην περίπτωση του European Put on Max. Το συμβόλαιο αυτό δίνει το δικαίωμα στον κάτοχό του να πουλήσει την μέγιστη των δύο μετοχών (στην λήξη) στην τιμή εξάσκησης. Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά της Παραγράφου 7.1.8. Το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων συγκλίνει πιο γρήγορα και πιο ομαλά από ότι το υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων στην τιμή Monte-Carlo για την τιμή του λ που πήραμε παραπάνω. Επομένως δεν θα σχολιάσουμε περαιτέρω τα σχήματα και τους πίνακες καθώς καταλήγουμε στα ακριβώς ίδια συμπεράσματα.

7.1.8 Συμπεράσματα

Με βάση την παραπάνω ανάλυση καταλήγουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα για την περίπτωση ενός δικαιώματος προαίρεσης αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου:

- Τόσο το υπόδειγμα των τεσσάρων όσο και το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων κρίνονται αποτελεσματικά καθώς και τα δύο συγκλίνουν στην τιμή Monte-Carlo, με κύρια διαφορά στο χρόνο σύγκλισης και την διακύμανση στις τιμές τους.

- Ανεξαρτήτως της τιμής των διαφόρων παραμέτρων (σ, r, T, N, K), βλέπουμε ότι το υπόδειγμα πέντε αλμάτων (για $\lambda = 1.11803$) συγκλίνει πιο γρήγορα και πιο ομαλά από το υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων στην τιμή που δίνει η προσομοίωση Monte-Carlo για την τιμή του δικαιώματος.

- Για μία τιμή λ κοντά στο 1.1, φαίνεται οπτικά τουλάχιστον πως το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων δίνει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Αυτό βέβαια είναι κάτι που πρέπει να επαληθευθεί και μαθηματικά και αποτελεί ανοιχτό ερώτημα για μία μελλοντική εργασία.

7.2 Βασικά σημεία κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό κάναμε αριθμητική μελέτη του υποδείγματος των τεσσάρων και πέντε αλμάτων. Συγκρίναμε τα αποτελέσματά τους ως προς την τιμή του υποδείγματος Monte-Carlo. Πιο συγκεκριμένα, εξετάσαμε:

- την συμπεριφορά, συμπεριλαμβανομένης και της ταχύτητας σύγκλισης και των δύο υποδειγμάτων τιμολόγησης, σε ένα πεδίο δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου γραμμένα σε δύο μετοχές.

- την συμπεριφορά (ευαισθησία) των υποδειγμάτων αυτών συναρτήσει των διαφόρων υποκείμενων παραμέτρων τους (σ, r, T, N, λ).

καταλήξαμε σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα για την συμεριφορά των υποδειγμάτων.

8

Επίλογος

Η Χρηματοοικονομική Μηχανική αποτελεί έναν από τους πιο σημαντικούς κλάδους που βρίσκεται μεταξύ της επιστήμης της χρηματοοικονομικής και των μαθηματικών και ασχολείται με τη δημιουργία, την εξέλλιξη και την υλοποίηση διαφόρων χρηματοοικονομικών εργαλείων καθώς και τη διατύπωση εμπεριστατομένων λύσεων σε πολλά χρηματοοικονομικά προβλήματα. Η Χρηματοοικονομική Μηχανική είναι μία επιστήμη που αναπτύσσεται στο πεδίο των μαθηματικών και της χρηματοοικονομικής. Σκοπός της είναι η επίλυση προβλημάτων που αφορούν τον κόσμο της χρηματοοικονομικής αλλά και της οικονομίας γενικότερα, χρησιμοποιώντας τεχνικές και ιδέες από το πεδίο των Μαθηματικών και Στοχαστικών Μαθηματικών, αλλά πιο συσκεκριμένα από το πεδίο των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής. Ένα από τα βασικότερα προβλήματα της Χρηματοοικονομικής Μηχανικής που έχει εφαρμογές τόσο στην αντιστάθμιση του χρηματοοικονομικού κινδύνου, όσο και στην κερδοσκοπία είναι το πρόβλημα της τιμολόγησης των παραγώγων συμβολαίων και ειδικότερα των δικαιωμάτων προαίρεσης, λόγω του ειδικού του χαρακτήρα τους.

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία ασχοληθήκαμε συγκεκριμένα με το πρόβλημα της τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης, γραμμένα σε μία και περισσότερες μετοχές (τίτλους), τα οποία αποτελούν ένα από τα δημοφιλέστερα είδη παραγώγων συμβολαίων. Τα Δικαιώματα Προαίρεσης (Options), αποτελούν μία συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλομένων, για την αγοραπωλησία μίας συγκεκριμένης ποσότητας ενός περιουσιακού στοιχείου σε μία προκαθορισμένη χρονική στιγμή και τιμή στο μέλλον. Πρόκειται για συμφωνίες οι οποίες διαπραγματεύονται τόσο εντός, όσο και εκτός χρηματιστηριακών αγορών, όπως για παράδειγμα σε τράπεζες, χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, όχι αναγνωρισμένες χρηματιστηριακές αγορές. Συνήθως οι όροι τους είναι τυποποιημένοι και καθορίζονται από το Χρηματιστήριο. Ένα δικαίωμα προαίρεσης αποτελεί ένα πολύ ενδιαφέρον παράγωγο συμβόλαιο, καθώς η κατοχή του απαιτεί την καταβολή ενός αντιτίμου, γνωστό και ως ασφάλιστρο (όταν κάνουμε τιμολόγηση, σκοπός μας είναι η εύρεση αυτής της τιμής). Πιο συγκεκριμένα, ο αγοραστής του δικαιώματος πληρώνει το ασφάλιστρο και αποκτά το δικαίωμα εξάσκησης, ενώ ο πωλητής του δικαιώματος εισπράττει το αντίτιμο και αναλαμβάνει την υποχρέωση να τηρήσει τα συμφωνηθέντα, αν και μόνο αν η αντίθετη θέση (ο αγοραστής του δικαιώματος) αποφασίσει να εξασκήσει.

Το βασικότερο και πιο απλό υπόδειγμα τιμολόγησης είναι το διωνυμικό υπόδειγμα που προτάθηκε αρχικά από τον Sharpe [27] το 1978 και αργότερα επεκτάθηκε από τους Cox, Ross και Rubinstein [19] το 1979 και ήρθε στη μορφή που είναι σήμερα. Το υπόδειγμα αυτό υποθέτει ότι η υποκείμενη μετοχή εξελίσσεται στον χρόνο με το πιο απλό μαθηματικό μοντέλο, δηλαδή ότι την επόμενη χρονική στιγμή η τιμή της μετοχής θα ανέβει ή θα πέσει. Στην ίδια κατεύθυνση κινείται και το τριωνυμικό υπόδειγμα, το οποίο προτάθηκε από τον Phelim Boyle [16] το 1988 και επεκτάθηκε περαιτέρω από τους Kamrad & Ritchken [24] το 1991. Μάλιστα το υπόδειγμα των οποίων εξετάσαμε στην παρούσα εργασία. Ουσιαστικά το υπόδειγμα αυτό έρχεται να προσθέσει ακόμη μία κατάσταση (στο διωνυμικό υπόδειγμα), αυτή του οριζοντίου άλματος, που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο η τιμή της μετοχής να παραμείνει σταθερή. Και τα δύο αυτά υποδείγματα, είναι κατασκευασμένα με τέτοιο τρόπο, ώστε να συγκλίνουν κατά μία ιδιαίτερη έννοια (σύγκλιση σε κατανομή) στο υπόδειγμα των Black-Scholes [15].

Στην παρούσα εργασία, στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάσαμε τόσο το διωνυμικό υπόδειγμα και δείξαμε την βασική του φιλοσοφία. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάσαμε την επέκταση του διωνυμικού και καταλήξαμε στο τριωνυμικό υπόδειγμα και κατόπιν στο κεφάλαιο 4, κάναμε μία αριθμητική συγκρητική - μελέτη των υποδειγμάτων. Τα συμπεράσματα που καταλήξαμε είναι τα ακόλουθα:

- Τα υποδείγματα που εξετάστηκαν, στο σύνολό τους αποδείχθηκαν αποτελεσματικά, με κύρια διαφορά στον χρόνο σύγκλισης και την διακύμανση στις τιμές τους.

- Τόσο το τριωνυμικό, όσο και το διωνυμικό για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων παρουσίαζουν πολύ μικρές διαφορές από την τιμή που θεωρήσαμε ως σημείο αναφοράς.

- Ανεξαρτήτως της τιμής των διαφόρων παραμέτρων (σ, r, T, N), βλέπουμε ότι το τριωνυμικό υπόδειγμα (για $\lambda = 1.22474$) συγκλίνει γρηγορότερα και πιο ομαλά από το διωνυμικό στην τιμή που δίνει το μοντέλο Black-Scholes [15].

- Αν $\lambda < 1$, από τις Εξισώσεις 3.7 και 3.8, καθώς και από τον Πίνακα 3.1 βλέπουμε πως το P_m θα πάρει αρνητικές τιμές, ενώ τα P_u και P_d μεγαλύτερα από την μονάδα (Αυτό άλλωστε αποτελεί και το μεγαλύτερο πρόβλημα στην ανάλυση του Boyle [16] το 1988 και για τον λόγο αυτό οι Kamrad & Ritchken [24] πρότειναν να χρησιμοποιήσουμε την παράμετρο $\lambda \geq 1$). Για $\lambda \geq 1$, βλέπουμε πως τα P_u, P_d και P_m είναι μεταξύ του μηδέν και του ένα, είναι όλα θετικά και αθροίζουν στη μονάδα.

- Για $\lambda = 1$, όταν το N μεγαλώνει το διωνυμικό και το τριωνυμικό υπόδειγμα, δίνουν την ίδια τιμή.

- Για μία τιμή λ κοντά στο 1.2, φαίνεται οπτικά τουλάχιστον πως το τριωνυμικό υπόδειγμα δίνει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Αυτό βέβαια είναι κάτι που πρέπει να επαληθευθεί και μαθηματικά και αποτελεί ανοιχτό ερώτημα για μιά μελλοντική εργασία.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως τόσο το διωνυμικό, όσο και το τριωνυμικό υπόδειγμα συμπεριφέρονται πάρα πολύ καλά. Το τριωνυμικό βέβαια υπερέχει έναντι του διωνυμικού, όμως η υπολογιστική του ισχύς που απαιτεί είναι μεγαλύτερη από το διωνυμικό υπόδειγμα. Είναι πολύ χρήσιμα και εφαρμόζονται συχνά στην πράξη (η τιμολόγηση Αμερικάνικων δικαιωμάτων στο χρηματιστήριο αξιών Αθηνών, γίνεται με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα). Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που προκύπτει σε αυτό το σημείο, είναι το πως μπορούμε να κάνουμε τιμολόγηση δικαιωμάτων που είναι γραμμένα σε παραπάνω από μία μετοχές, μιάς και τα παραπάνω υποδείγματα αφορούν μία υποκείμενη μετοχή και οι επενδυτές στην πράξη ενδιαφέρονται συχνά για παραπάνω από μία μετοχές (αυτό συμβαίνει είτε για λόγους διαφοροποίησης του χρηματοοικονομικού κινδύνου που αντιμετωπίζουν είτε για λόγους αντιστάθμισης). Η πολυπλοκότητα του παραπάνω ερωτήματος αυξάνει γραμμικά με τον αριθμό των υποκείμενων μετοχών του δικαιώματος. Στην παρούσα εργασία εξετάσαμε την περίπτωση δικαιώματος γραμμένου πάνω σε δύο μετοχές.

Στην περίπτωση που έχουμε ένα δικαίωμα γραμμένο σε δύο μετοχές, κρίνεται απαραίτητη η επέκταση του διωνυμικού και του τριωνυμικού υποδείγματος που παρουσιάστηκαν στο πρώτο μέρος της εργασίας. Το απλό διωνυμικό υπόδειγμα των Cox, Ross & Rubinstein [19] τροποποιείται στο υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων σύμφωνα με τους Boyle, Evnine & Gibbs (1989) [13], ενώ το τριωνυμικό υπόδειγμα τροποποιείται σύμφωνα με το υπόδειγμα που προτάθηκε από τον Phelim Boyle [16] το 1988 και επεκτάθηκε περαιτέρω από τους Kamrad & Ritchken [24] το 1991, στο υπόδειγμα πέντε αλμάτων. Η φιλοσοφία των δύο υποδειγμάτων είναι πως οι λογαριθμικές αποδόσεις των μετοχών συσχετίζονται μεταξύ τους και εξελίσσονται στον χρόνο με βάση την γεωμετρική κίνηση Brown.

Η μαθηματική φιλοσοφία του υποδείγματος των τεσσάρων αλμάτων είναι πως κατασκευάζουμε μία διακριτή κατανομή τεσσάρων αλμάτων στην περίπτωση αυτή και εξισώνουμε τις πρώτες ροπές των κατανομών αυτών, με τις ροπές της κανονικής κατανομής, την οποία ακολουθούν οι λογαριθμικές αποδόσεις των υποκείμενων μετοχών. Παρομοίως, η μαθηματική φιλοσοφία του υποδείγματος των πέντε αλμάτων είναι πως κατασκευάζουμε μία διακριτή κατανομή πέντε αυτή τη φορά αλμάτων και εξισώνουμε τις πρώτες ροπές των κατανομών αυτών, με τις ροπές της κανονικής κατανομής, την οποία ακολουθούν οι λογαριθμικές αποδόσεις των υποκείμενων μετοχών.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάσαμε τα βασικά χαρακτηριστικά του υποδείγματος τεσσάρων αλμάτων. Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάσαμε το υπόδειγμα πέντε αλμάτων και τα βασικά του χαρακτηριστικά. Στο κεφάλαιο 7 κάναμε μία αριθμητική συγκρητική - μελέτη των υποδειγμάτων, έχοντας ως γνώμονα την τιμή που δίνει η μεθοδολογία Monte Carlo. Τα συμπεράσματα που καταλήξαμε είναι τα ακόλουθα:

- Τα υποδείγματα που εξετάσαμε, στο σύνολό τους αποδείχθηκαν αποτελεσματικά, με κύρια διαφορά στον χρόνο σύγκλισης και την διακύμανση στις τιμές τους.
- Τόσο το υπόδειγμα τεσσάρων όσο και των πέντε αλμάτων για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων παρουσίαζουν πολύ μικρές διαφορές από την τιμή που θεωρήσαμε ως σημείο αναφοράς.
- Ανεξαρτήτως της τιμής των διαφόρων παραμέτρων (σ, r, T, N, K), βλέπουμε ότι το υπόδειγμα πέντε αλμάτων (για $\lambda = 1.11803$) συγκλίνει γρηγορότερα και πιο ομαλά από το τεσσάρων στην τιμή που δίνει η μεθοδολογία Monte Carlo.
- Αν $\lambda < 1$, από το σύστημα Εξισώσεων 6.13, καθώς και από τον Πίνακα 6.3 βλέπουμε πως το P_5 θα πάρει αρνητικές τιμές, ενώ τα P_1, P_2, P_3 και P_4 είναι μεγαλύτερα από την μονάδα. Για $\lambda \geq 1$, βλέπουμε πως τα P_1, P_2, P_3 και P_4 είναι μεταξύ του μηδέν και του ένα, είναι όλα θετικά και αθροίζουν στη μονάδα.
- Για $\lambda = 1$, όταν το N μεγαλώνει το υπόδειγμα των τεσσάρων και πέντε αλμάτων δίνουν την ίδια τιμή.
- Για μία τιμή λ κοντά στο 1.1, φαίνεται οπτικά τουλάχιστον πως το υπόδειγμα πέντε αλμάτων δίνει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Αυτό βέβαια είναι κάτι που πρέπει να επαληθευθεί και μαθηματικά και αποτελεί ανοιχτό ερώτημα για μία μελλοντική εργασία.

Κατά την διάρκεια της μελέτης αυτής προέκυψαν κάποια πολύ ενιαφέροντα ερωτήματα που ξεφεύγουν όμως από το επίπεδο των προπτυχιακών σπουδών και θα ήταν ενδιαφέρον να απαντηθούν στο μέλλον σε κάποια εργασία. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι στον κόσμο της χρηματοοικονομικής έχουμε έντονη μεταβλητότητα και χαμηλότερη μεταβλητότητα, έχουμε δηλαδή τα λεγόμενα volatility regimes. Πως μπορούν τα υποδείγματα των τεσσάρων και πέντε αλμάτων να τροποποιηθούν για αυτή την περίπτωση; Γνωρίζουμε επίσης πως το επιτόκιο δεν είναι σταθερό, αλλά στοχαστικό. Πως μπορούν τα υποδείγματα αυτά να τροποποιηθούν κατάλληλα λαμβάνοντας υπόψην την στοχαστηκότητα του επιτοκίου; Πως μπορούν τα υποδείγματα αυτά να τροποποιηθούν και να χρησιμοποιηθούν ώστε να κάνουν τιμολόγηση εξωτικών δικαιωμάτων (π.χ. Ασιατικά δικαιώματα ή δικαιώματα με φράγματα);

Βιβλιογραφία

[1] Π. Αγγελόπουλος, *Εισαγωγή στα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα.* ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ, (2011).

[2] Α.Ν. Γιαννακόπουλος, *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική.* Πανεπιστήμιο Αιγαίου, ΣΑΧΜ, (2003).

[3] Ε. Λιβάνης & Ν. Γεωργιάδης, *Οδηγός παραγώγων προϊόντων στην ελληνική χρηματιστηριακή αγορά.* Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, (2002).

[4] Ι. Μπαλτάς, *Αποτίμηση δικαιωμάτων σε χρόνο διακριτό: Το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης.* Πανεπιστήμιο Αιγαίου, ΤΜΟΔ, (2019).

[5] Ι. Μπαλτάς, *Προσομοίωση βασικών στοχαστικών διαδικασιών.* Πανεπιστήμιο Αιγαίου, ΤΜΟΔ, (2019).

[6] Ι. Μπαλτάς, *Αποτίμηση δικαιωμάτων σε χρόνο διακριτό: Προσομοίωση Monte Carlo.* Πανεπιστήμιο Αιγαίου, ΤΜΟΔ, (2019).

[7] Ι. Μπαλτάς, *Αποτίμηση δικαιωμάτων σε χρόνο συνεχή: Προσομοίωση Monte Carlo.* Πανεπιστήμιο Αιγαίου, ΤΜΟΔ, (2019).

[8] J. Hull, *Βασικές αρχές των αγορών και των συμβολαίων δικαιωμάτων.* Κλειδάριθμος, 9th American edition, (2017).

[9] Θ. Πουφινάς & Χρ. Φλώρος, *Χρηματοοικονομικά Παράγωγα.* Εκδόσεις Δίσιγμα, (2014).

[10] Χρ. Φλώρος, *Παράγωγα Προϊόντα και Τεχνικές Αντιστάθμισης Κινδύνων.* ΤΕΙ Κρήτης, Σημειώσεις μαθήματος, (2017).

[11] L. Bachelier, *Theory of speculation.* PhD thesis, (1900).

[12] T. Bjork, *Arbitrage theory in continuous time.* Oxford Finance, (2009).

[13] Ph. P. Boyle, J. Evnine & St. Gibbs, *Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims.* The Review of Financial Studies, 2, 241-250, (1989).

[14] P. Brandimarte, *Numerical Methods in Finance and Economics.* John Wiley & Sons, 7, 2nd edition, (2006).

[15] F. Black & M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* Journal of Political Economy, 31, 637-654, (1973).

[16] Ph. P. Boyle, *A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables.* Journal of Financial and Quantitive Analysis, 23, (1988).

[17] Z. Brzezniak & T. Zastawniak, *Basic Stochastic Processes: A Course Through Exercises.* Springer, 7, (2015).

[18] M. Capinski & T. Zastawniak, *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering.* Springer, (2002).

[19] J. Cox, S. Ross & M. Rubinstein, *Option pricing: A simplified approach.* Journal of Financial Economics, 7, 229-263, (1979).

[20] A. Einstein, *On the Motion of Small Particles Suspended in Liquids at Rest Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat.* Annalen der Physik, 17, 549-560, (1905).

[21] E.S. Haug, *The Complete Guide to Option Pricing Formulas.* McGraw-Hill, 2nd Edition (1997).

[22] J. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives.* Pearson Prentice Hall, 8th edition, (2013).

[23] P. James, *Option Theory.* John Wiley & Sons, (2003).

[24] B. Kamrad & P. Ritchken, *Multinomial Approximating Models For Options With k State Variables.* Managment Science, 37, 1640-1652, (1991).

[25] L. Clewlow & C. Strickland, *Implementing Derivatives Models.* John Wiley & Sons, (2007).

[26] S. R. Pliska. *Introduction to Mathematical Finance.* Blackwell Publishing, (1997).

[27] W.F. Sharpe, *Investments.* Prentice-Hall, New Jersey, (1978).

[28] Y. Tian, *A Modified Lattice Approach to Option Pricing.* The Journal of Futures Markets, Vol 13, No. 5, 563-577 (1993).

[29] T. Warral. *The n-period Binomial Model.* SPRING, (2008).

Α′

Αριθμητική μελέτη του διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης για την περίπτωση του Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης

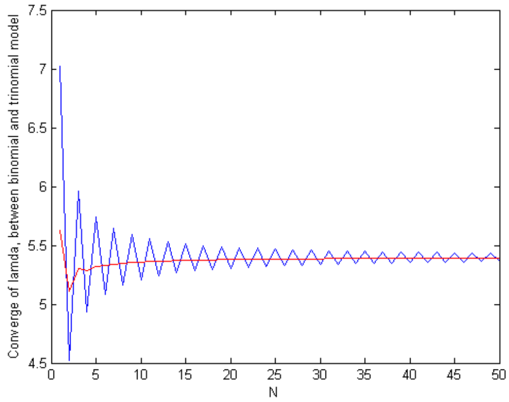
Ο στόχος μας και εδώ είναι να κάνουμε μια αριθμητική μελέτη της συμπεριφοράς του τριωνυμικού και του διωνυμικού υποδείγματος τιμολόγησης για δικαιώματα γραμμένα σε μία μετοχή, για την περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης. Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά της Παραγράφου 7.1.8. Για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης, το τριωνυμικό δένδρο συγκλίνει πιο γρήγορα και πιο ομαλά από ότι το διωνυμικό στην τιμή του μοντέλου Black-Scholes. Επομένως δεν θα σχολιάσουμε περαιτέρω τα σχήματα και τους πίνακες καθώς τα συμπεράσματα για την περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης είναι ακριβώς ίδια με αυτά του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4.

Α′.1 Συμπεριφορά του τριωνυμικού δένδρου για διαφορετικές τιμές του λ (σταθερό N)

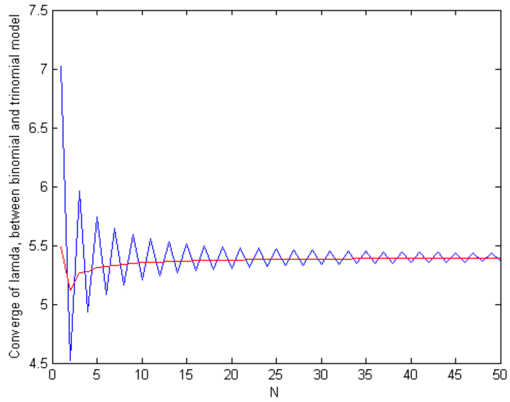
Πίνακας Α′.1: Τιμές τριωνυμικού δένδρου και διαφορά από την τιμή $B.S.$, για διάφορα λ, $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$, $N = 50$. (Η τιμή του διωνυμικού μοντέλου είναι 5.3624 και του B.S είναι 5.4011)

Eu Put λ	Τ.Υ.	Απόσταση Τ.Υ. από B.S
1.0	5.3635	0.0375
1.2	5.3919	0.0091
1.4	5.3829	0.0182
1.6	5.3724	0.0286
1.8	5.3605	0.0405
2.0	5.3471	0.0539
1.22474	5.3909	0.0101

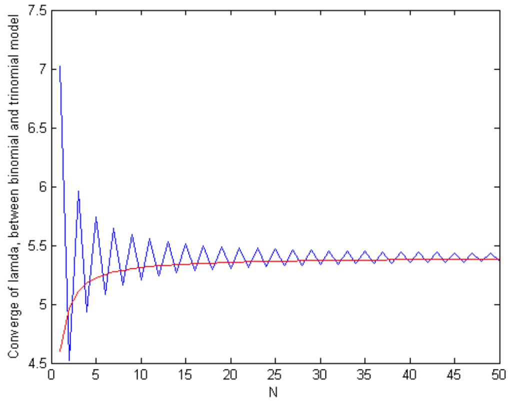
Α′.2 Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από το Black-Scholes καθώς μεταβάλλεται το N και το λ.



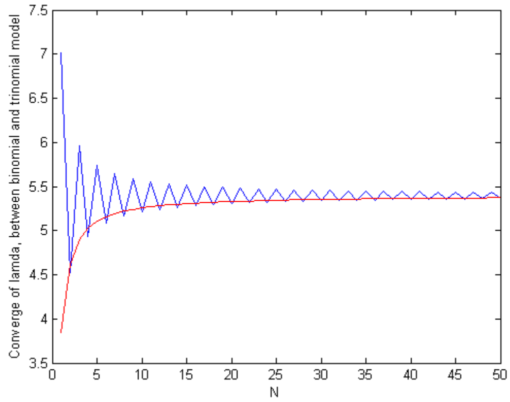
(α′) $\lambda = 1.2$



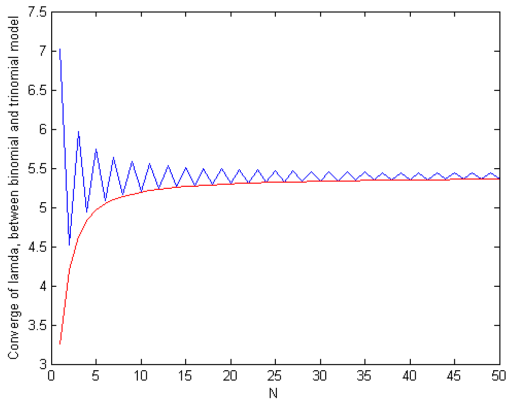
(β′) $\lambda = 1.22474$



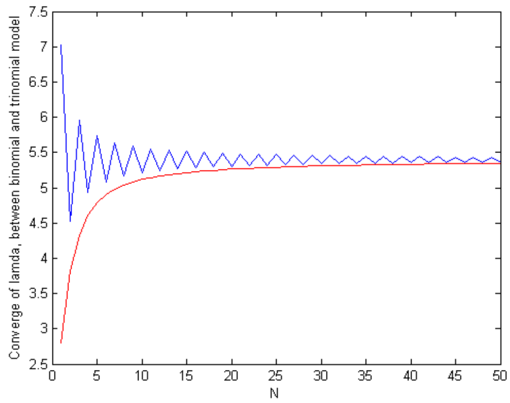
(γ′) $\lambda = 1.4$



(δ′) $\lambda = 1.6$



(ε′) $\lambda = 1.8$

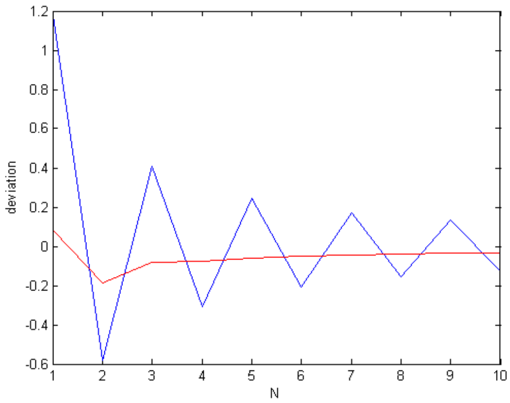


(ϛ′) $\lambda = 2$

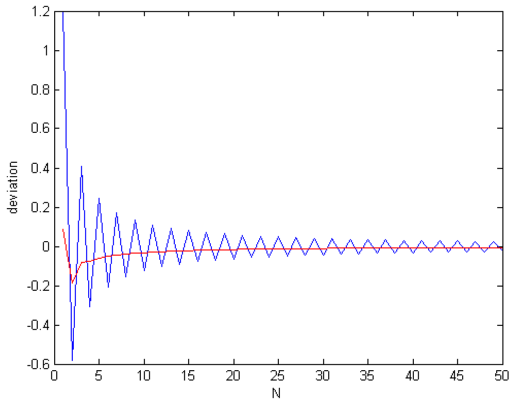
Α′.3 Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από το Black-Scholes καθώς αυξάνεται το N

Πίνακας Α′.2: Τιμές διωνυμικού και τριωνυμικού δένδρου, για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$, $\lambda = 1.22474$, N μεταβλητό και απόσταση αυτών από μοντέλο B.S.(Η τιμή του μοντέλου B.S είναι 4.0759)

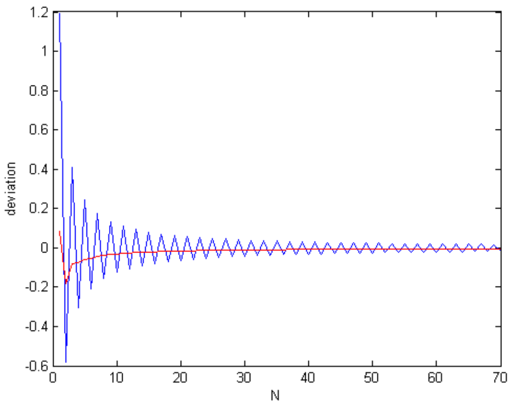
			ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ B.S.	
N	Δ.Υ.	Τ.Υ.	Δ.Υ.	Τ.Υ.
10	3,9504	4,0443	0,1256	0,0317
50	4,0506	4,0694	0,0254	0,0065
100	4,0633	4,0727	0,0127	0,0033
200	4,0696	4,0743	0,0064	0,0016
300	4,0717	4,0749	0,0042	0,0011
500	4.0734	4.0753	0,0025	0,0006



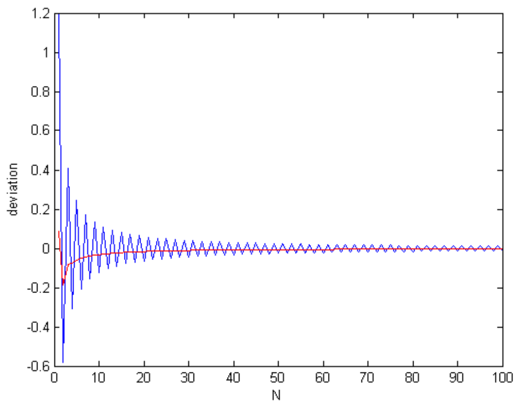
(α′) $N = 10$



(β′) $N = 50$



(γ′) $N = 70$



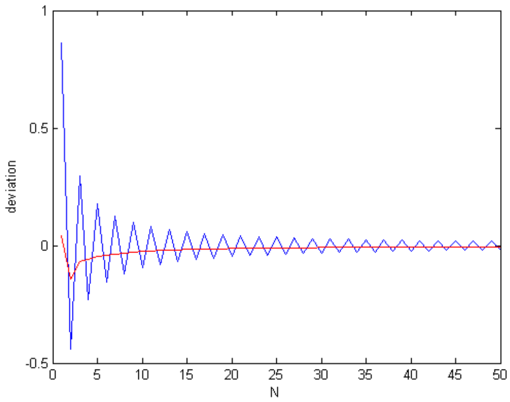
(δ′) $N = 100$

Σχήμα Α′.2: Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από μοντέλο B.S., για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$, $\lambda = 1.22474$.

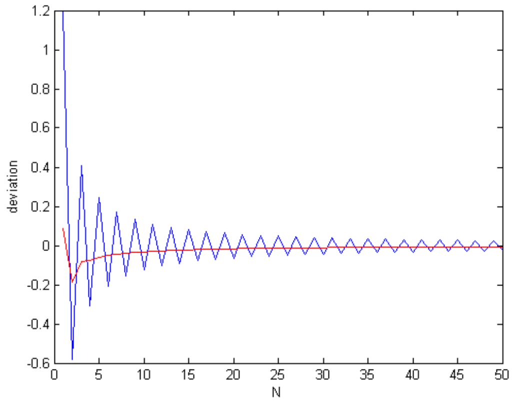
Α′.4 Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από το Black-Scholes καθώς μεταβάλλεται το σ

Πίνακας Α′.3: Τιμές διωνυμικού και τριωνυμικού δένδρου, για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $T = 5/12$, $\lambda = 1.22474$, $N = 50$, σ μεταβλητό και απόσταση αυτών από μοντέλο B.S.

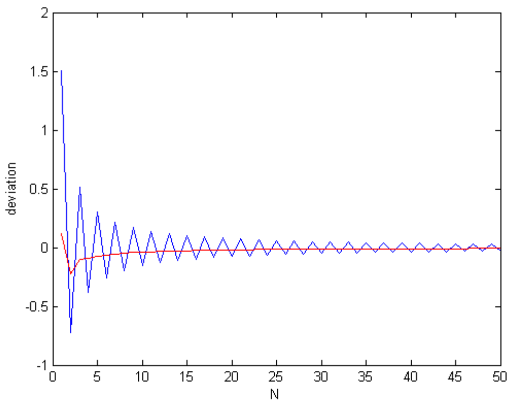
				ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ B.S.	
σ	Δ.Υ.	Τ.Υ.	B.S.	Δ.Υ.	Τ.Υ.
0,3	2,8253	2,8394	2,8446	0,0193	0,0052
0,4	4,0506	4,0694	4,0760	0,0254	0,0065
0,5	5,2792	5,3027	5,3108	0,0316	0,0081
0,6	6,5058	6,5338	6,5430	0,0377	0,0097



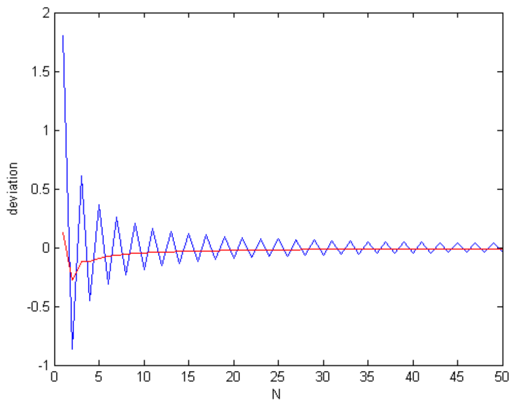
(α′) $\sigma = 0.3$



(β′) $\sigma = 0.4$



(γ′) $\sigma = 0.5$



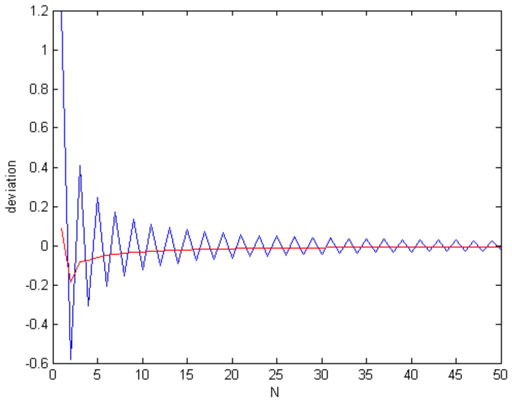
(δ′) $\sigma = 0.6$

Σχήμα Α′.3: Τιμές διωνυμικού και τριωνυμικού δένδρου, για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $T = 5/12$, $\lambda = 1.22474$, $N = 50$, σ μεταβλητό και απόσταση αυτών από μοντέλο B.S.

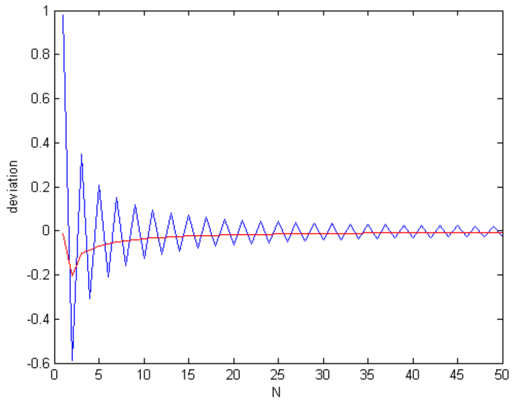
Α′.5 Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από το Black-Scholes καθώς μεταβάλλεται το r

Πίνακας Α′.4: Τιμές διωνυμικού και τριωνυμικού δένδρου, για $S_0 = 50$, $K = 50$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$, $\lambda = 1.22474$, $N = 50$, r μεταβλητό και απόσταση αυτών από μοντέλο B.S.

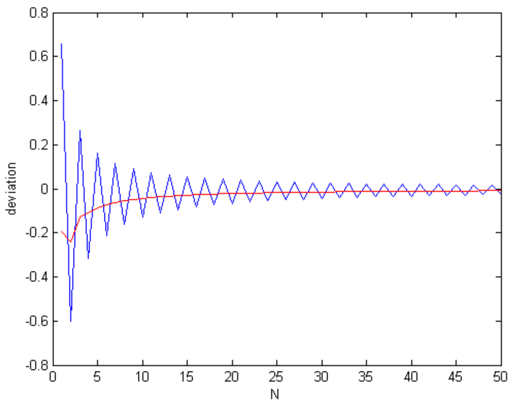
				ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ B.S.	
r	Δ.Υ.	Τ.Υ.	B.S.	Δ.Υ.	Τ.Υ.
0,1	4,0506	4,0694	4,0706	0,0254	0,0065
0,2	3,1591	3,1775	3,1848	0,0257	0,0074
0,3	2,4221	2,4396	2,4485	0,0264	0,0089
0,4	1,8237	1,8399	1,8508	0,0271	0,0108



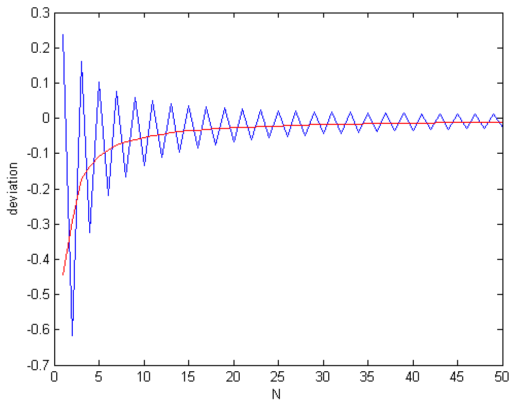
(α′) $r = 0.1$



(β′) $r = 0.2$



(γ′) $r = 0.3$



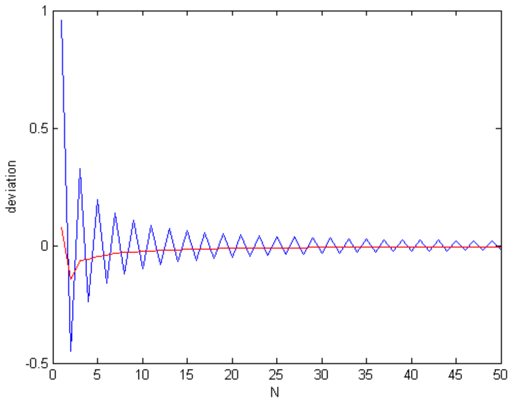
(δ′) $r = 0.4$

Σχήμα Α′.4: Τιμές διωνυμικού και τριωνυμικού δένδρου, για $S_0 = 50$, $K = 50$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$, $\lambda = 1.22474$, $N = 50$, r μεταβλητό και απόσταση αυτών από μοντέλο B.S.

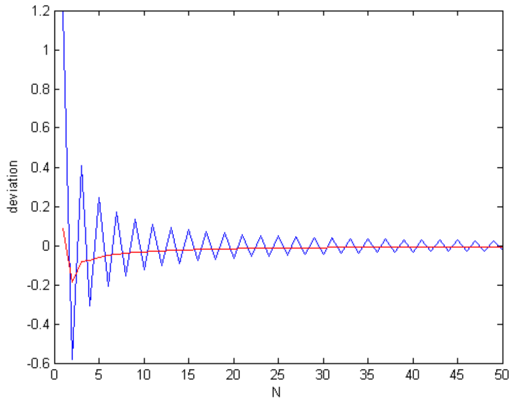
A′.6 Απόσταση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος από το Black-Scholes καθώς μεταβάλλεται το T

Πίνακας A′.5: Τιμές διωνυμικού και τριωνυμικού δένδρου, για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $\lambda = 1.22474$, $N = 50$, T μεταβλητό και απόσταση αυτών από μοντέλο B.S.

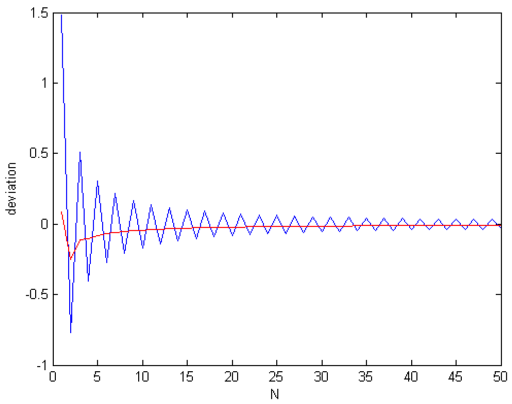
				ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ B.S.	
T	Δ.Υ.	Τ.Υ.	B.S.	Δ.Υ.	Τ.Υ.
3/12	3,3272	3,3419	3,3470	0,0198	0,0051
5/12	4,0506	4,0694	4,076	0,0254	0,0065
9/12	4,94	4,9649	4,9738	0,0338	0,0088
1	5,3624	5,3909	5,4011	0,0387	0,0102



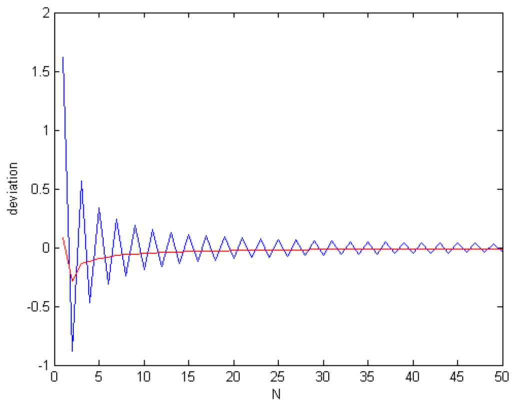
(α′) $T = 3/12$



(β′) $T = 5/12$



(γ′) $T = 9/12$



(δ′) $T = 1$

Σχήμα A′.5: Τιμές διωνυμικού και τριωνυμικού δένδρου, για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $\lambda = 1.22474$, $N = 50$, T μεταβλητό, για Ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης και απόσταση αυτών από μοντέλο B.S.

Α′.7 Διαφορά διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος καθώς μεταβάλλεται ο αριθμός των N περιόδων

Πίνακας Α′.6: Τιμές διωνυμικού και τριωνυμικού δένδρου, για $\lambda = 1$ (σταθερό), $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$, N μεταβλητό, για Ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης.

Eu Put N	Δ.Υ.	Τ.Υ.	Διαφορά Δ.Υ. με Τ.Υ.
10	5.2098	5.1176	0.0922
50	5.3624	5.3471	0.0152
100	5.3817	5.3743	0.0074
150	5.3882	5.3832	0.0049
300	5.3946	5.3948	0.0001

B′

Αριθμητική μελέτη του υποδείγματος των τεσσάρων και πέντε αλμάτων για την περίπτωση δικαιώματος πώλησης

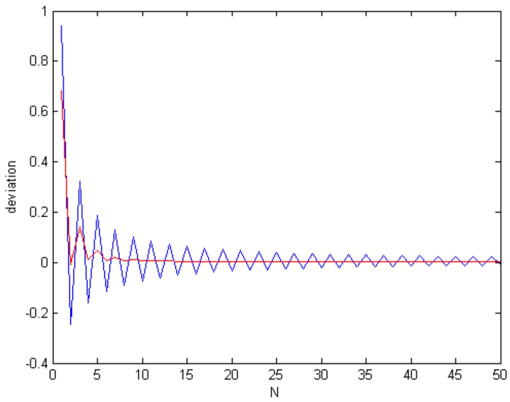
Ο στόχος μας και εδώ είναι να κάνουμε μια αριθμητική μελέτη της συμπεριφοράς του υποδείγματος τιμολόγησης των τεσσάρων και πέντε αλμάτων για την περίπτωση του European Put on Max. Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά του κεφαλαίου 7, όπου κάναμε αριθμητική ανάλυση για το European Call on Max. Το υπόδειγμα των πέντε αλμάτων (για $\lambda = 1,11803$) συγκλίνει πιο γρήγορα και πιο ομαλά από ότι το υπόδειγμα των τεσσάρων αλμάτων στην τιμή της μεθοδολογίας Monte Carlo. Επομένως δεν θα σχολιάσουμε περαιτέρω τα σχήματα και τα γραφήματα, άρα δεν θα προβούμε σε αιτιολόγηση της κάθε περίπτωσης. Τα συμπεράσματα είναι ακριβώς ίδια με αυτά του κεφαλαίου 7.

B′.1 Συμπεριφορά του υποδείγματος πέντε αλμάτων για διαφορετικές τιμές του λ

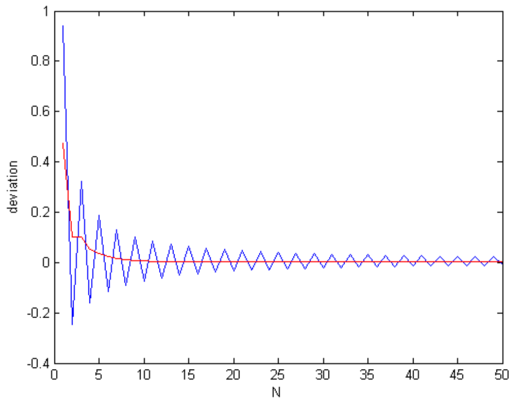
Πίνακας B′.1: Τιμές του υποδείγματος τιμολόγησης πέντε αλμάτων δικαιωμάτων και διαφορά από την εκτίμηση της τιμής του δικαιώματος με την προσομοίωση Monte-Carlo για διάφορα λ. $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $r = 0.04879$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, $T = 7/12$, $N = 50$, $M = 1000000$ τα μονοπάτια της Monte-Carlo. (Η τιμή του υποδείγματος τεσσάρων αλμάτων είναι 1.1333 και η τιμή της προσομοίωσης Monte Carlo είναι 1.1416)

Eu Put On Max		
λ	$K.R.$	Απόσταση $K.R.$ από Monte Carlo
1.0	1.1333	0.0083
1.2	1.1452	0.0035
1.4	1.1437	0.0020
1.6	1.1421	0.0004
1.8	1.1403	0.0013
2.0	1.1385	0.0031
1.11803	1.1458	0.0041

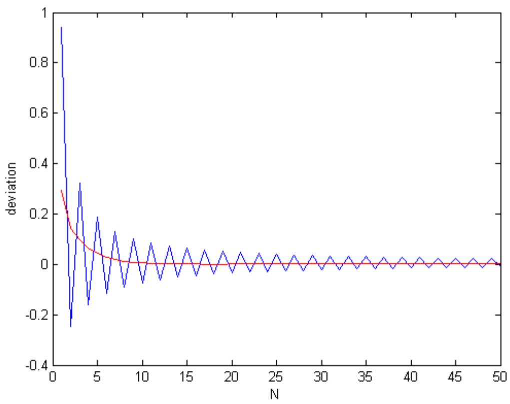
B′.2 Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte-Carlo καθώς μεταβάλλεται το N βημάτων και το λ).



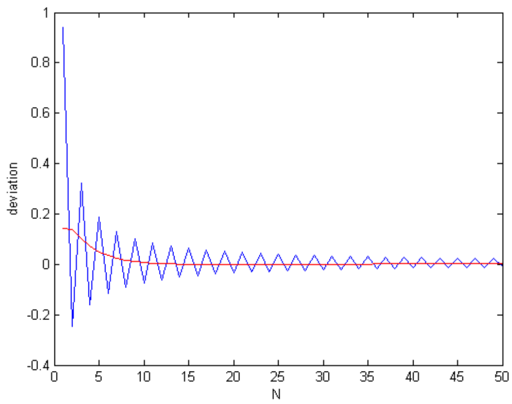
(α′) $\lambda = 1.1$



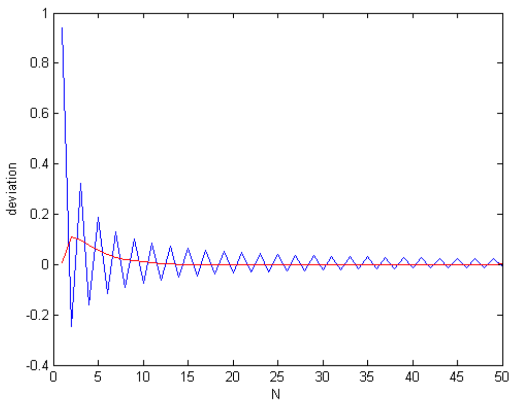
(β′) $\lambda = 1.2$



(γ′) $\lambda = 1.3$



(δ′) $\lambda = 1.4$



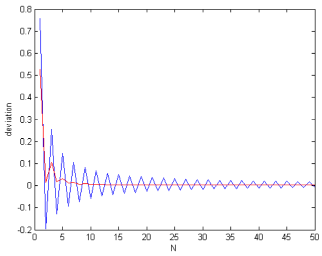
(ε′) $\lambda = 1.5$

Σχήμα B′.1: Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte Carlo, για διάφορα λ, $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $r = 0.04879$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, $T = 1$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo.

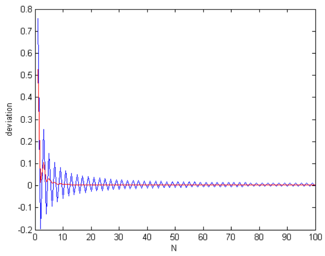
Β′.3 Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte-Carlo καθώς αυξάνεται το N

Πίνακας Β′.2: Τιμές υποδείγματος τιμολόγησης τεσσάρων και πέντε αλμάτων για $\lambda = 1.11803$. $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $r = 0.04879$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$ $T = 7/12$, $M = 1000000$ τα βήματα της προσομοίωσης Monte-Carlo, καθώς το N μεταβάλλεται. (Η τιμή του μοντέλου Monte Carlo είναι 1.1416)

Eu Put On Max			Απόσταση *B.E.G.* και *K.R.* από M.C	
N	*B.E.G.*	*K.R.*	*B.E.G.*	*K.R.*
10	1.0842	1.1472	0.0574	0.0055
30	1.1248	1.1456	0.0168	0.0039
50	1.1595	1.1458	0.0083	0.0041
70	1.1370	1.1459	0.0046	0.0042
100	1.1398	1.1460	0.0018	0.0043



(α′)



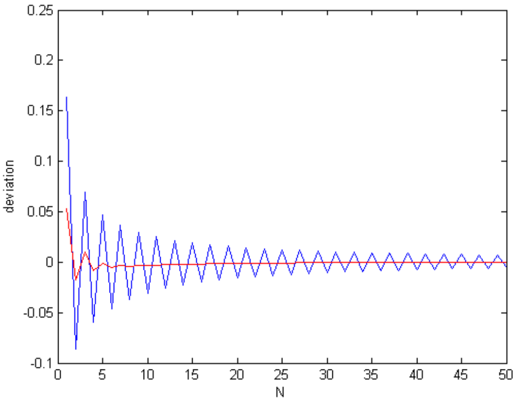
(β′)

Σχήμα Β′.2: Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte Carlo, αντίστοιχα για κάθε γράφημα, $r = 0.04879$, $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$, $\sigma_1 = 0.2$ $\sigma_2 = 0.3$ $T = 7/12$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo, $N = 50$.

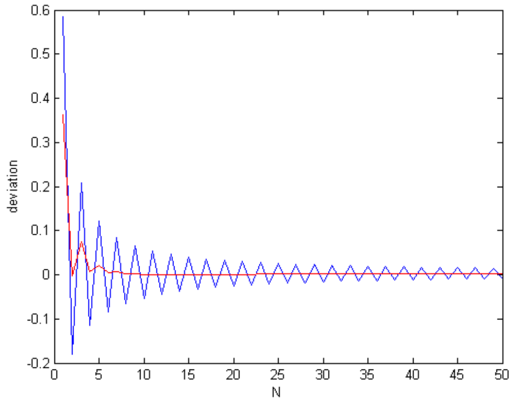
Β′.4 Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte-Carlo καθώς μεταβάλλεται το σ_1

Πίνακας Β′.3: Τιμές υποδείγματος τιμολόγησης τεσσάρων και πέντε αλμάτων και απόσταση από την τιμή Monte Carlo, για διάφορα σ_1, $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$, $T = 7/12$, $r = 0.1$, $\sigma_2 = 0.3$ $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo, $N = 50$.

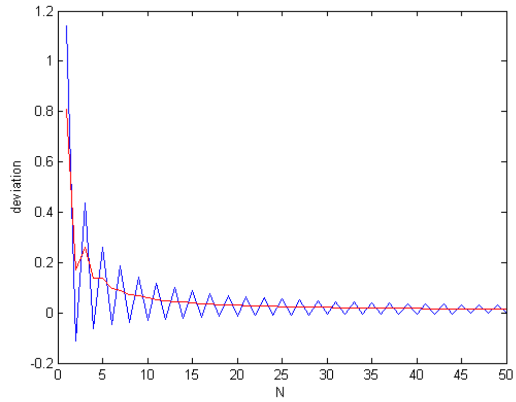
				ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ M.C.	
σ_1	*B.E.G.*	*K.R.*	M.C.	*B.E.G.*	*K.R.*
0,1	0.2703	0.2763	0.2761	0.0057	0.0002
0,2	0.8158	0.8265	0.8241	0.0083	0.0023
0,3	1.2145	1.2317	1.2171	0.0025	0.0046
0,4	1.4590	1.4763	1.4719	0.0128	0.0044



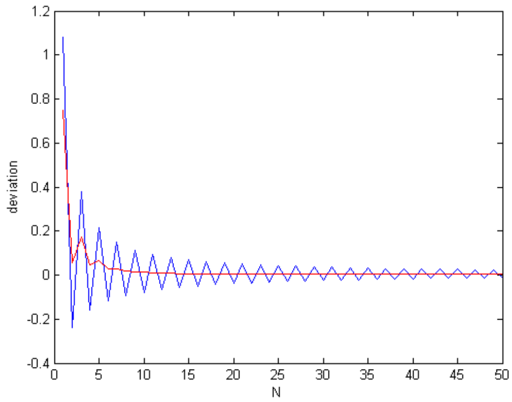
(α′) $\sigma_1 = 0.1$



(β′) $\sigma_1 = 0.2$



(γ′) $\sigma_1 = 0.3$



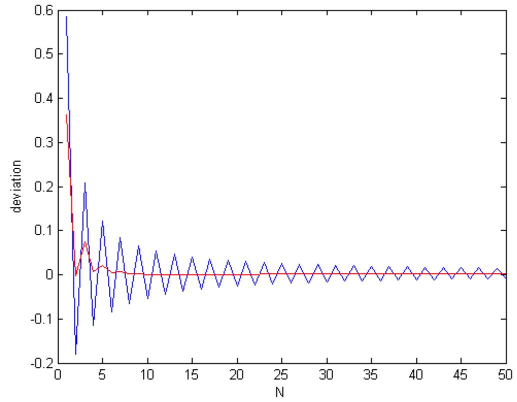
(δ′) $\sigma_1 = 0.4$

Σχήμα Β′.3: Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte Carlo, για διάφορα σ_1, $r = 0.1$, $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$, $\sigma_2 = 0.3$ $T = 7/12$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo, $N = 50$.

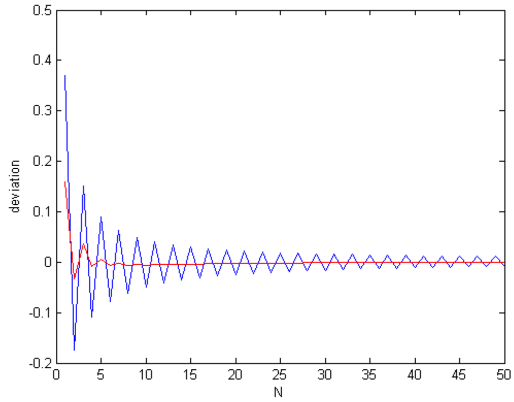
Β′.4.1 Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte-Carlo καθώς μεταβάλλεται το r

Πίνακας Β′.4: Τιμές υποδείγματος τιμολόγησης τεσσάρων και πέντε αλμάτων και απόσταση από την τιμή Monte Carlo, για διάφορα r, $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, $T = 7/12$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo, $N = 50$.

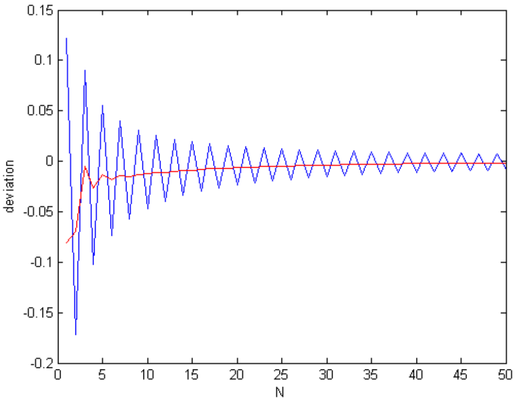
				ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ M.C.	
r	*B.E.G.*	*K.R.*	M.C.	*B.E.G.*	*K.R.*
0,1	0.8158	0.8265	0.8241	0.0083	0.0023
0,15	0.57677	0.5855	0.5852	0.0084	0.0003
0,2	0.3967	0.4037	0.4052	0.0084	0.0014
0,3	0.1718	0.1755	0.1794	0.0075	0.0038



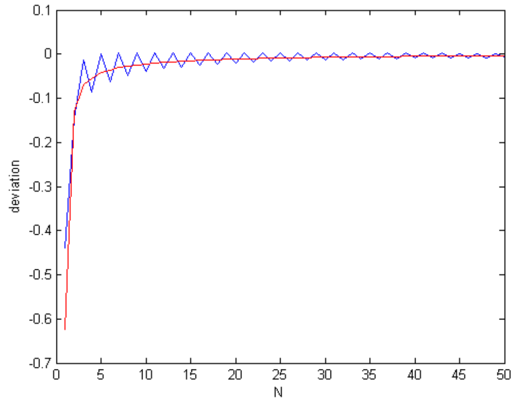
(α′) $r = 0,1$



(β′) $r = 0,15$



(γ′) $r = 0,2$



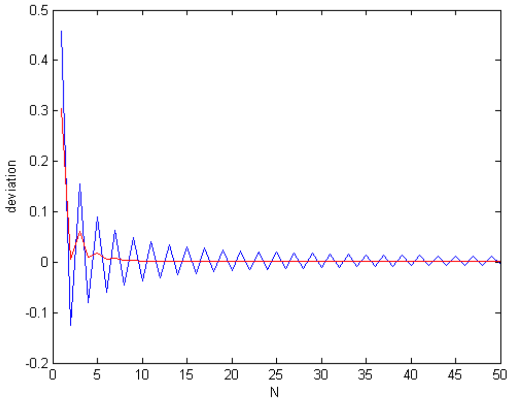
(δ′) $r = 0,3$

Σχήμα Β′.4: Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte Carlo, για διάφορα r, $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$ $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$ $T = 7/12$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo, $N = 50$.

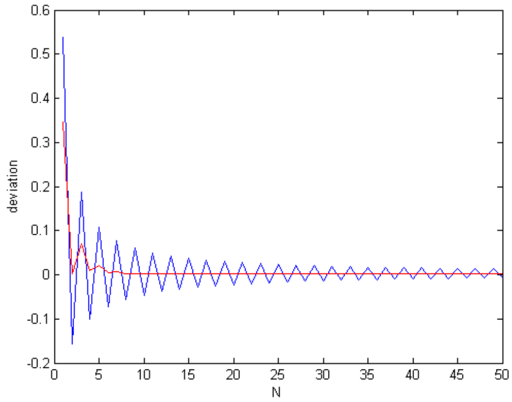
Β′.5 Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte-Carlo καθώς αυξάνεται το T

Πίνακας Β′.5: Τιμές υποδείγματος τιμολόγησης τεσσάρων και πέντε αλμάτων και απόσταση από την τιμή Monte Carlo, για διάφορα T. $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, $r = 0.1$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo, $N = 50$.

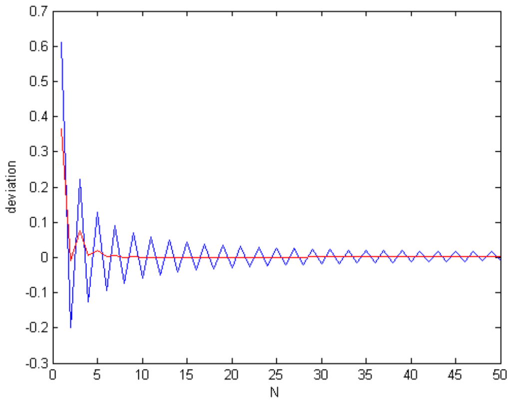
				ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ M.C.	
T	*B.E.G.*	*K.R.*	M.C.	*B.E.G.*	*K.R.*
3/12	0.6583	0.6661	0.6638	0.0054	0.0023
5/12	0.7591	0.7685	0.76613	0.0070	0.0024
9/12	0.8487	0.8602	0.8580	0.0093	0.0022
1	0.8715	0.8840	0.88221	0.0106	0.0018



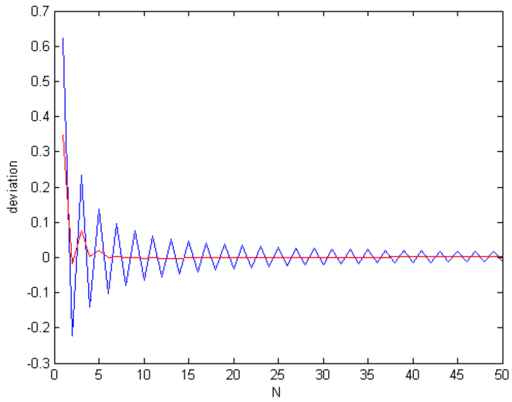
(α′) $T = 3/12$



(β′) $T = 5/12$



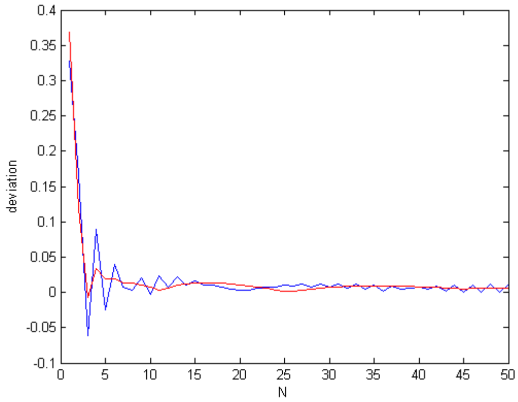
(γ′) $T = 9/12$



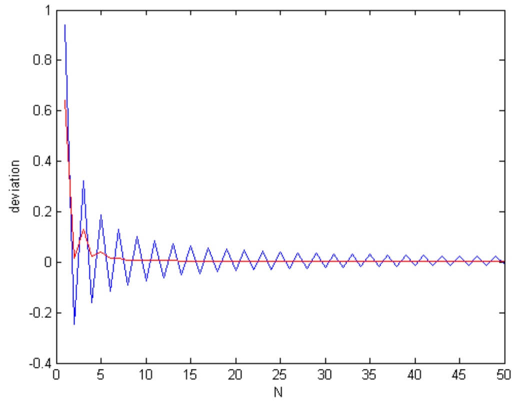
(δ′) $T = 1$

Σχήμα B′.5: Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte Carlo, για διάφορα T, $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $K = 40$, $\lambda = 1.11803$ $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$ $r = 0.1$, $M = 1000000$ τα διαφορετικά μονοπάτια της προσομοίωσης Monte-Carlo, $N = 50$.

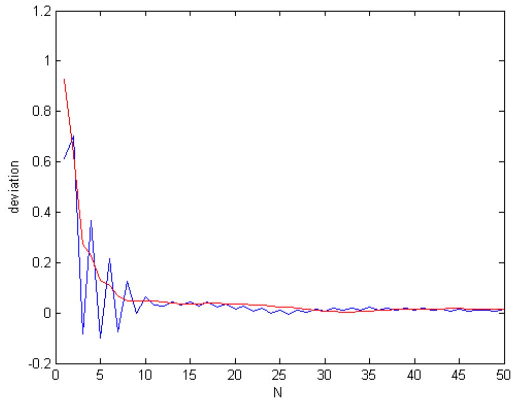
B′.6 Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte-Carlo καθώς μεταβάλλεται το K.



(α′) $K = 35$



(β′) $K = 40$



(γ′) $K = 45$

Σχήμα B′.6: Απόσταση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων από την τιμή Monte Carlo, για $S_1 = 40$, $S_2 = 40$, $T = 1$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$, $\rho = 0.5$, $r = 0.04879$, $M = 1000000$, $N = 50$, $\lambda = 1.11803$, και K μεταβλητό.

Γ′

Κώδικες

Στο παράρτημα αυτό παραθέτουμε όλους τους κώδικες της εργασίας.

Γ′.1 Διωνυμικό υπόδειγμα: Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

```
function [price] = BinomialEurCall(S_0,K,T,N,sigma,r)
%BinomialEurCall function calculates the fair price
 %of an European call option using the binomial model for N periods.

 %Inputs:
%S_0=current price of the asset i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma=volatility of the asset
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
dt=T/N;%length of one time step
u = exp(sigma*sqrt(dt));%up jump of asset(model parameter)
d=1/u; %down jump of asset(model parameter)
p=(exp(r*dt) - d)/(u-d);%pseudo probability of upward movement
disc=exp(-r*T);%discount
tree = zeros(1 , N+1);
%Binomial table with dimantions 1,N+1  /preallocate for efficiency
%for k=0:N
  %  St(1,k+1)=S_0*(u^k)*(d^(N-k)) ;
%end
%for j=0:N
  %  tree(1,j+1)=max(0, S_0*(u^j)*(d^(N-j))  -K);
%end
for j=0:N
    %binomial distribution formula
    tree(j+1) = ((nchoosek(N,j)*p^j*(1-p)^(N-j))*
                    max(0,S_0*(u^j)*(d^(N-j))-K ))*disc ;
end
price= sum(tree)%Output: Fair price for the European call option
end
```

Γ′.2 Τριωνυμικό υπόδειγμα: Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

```
function [price] = TrinomialEurCall(S_0,K,T,N,sigma,r,lamda)
%TrinomialEurCall function calculates the fair price
 %of an European call option using the binomial model for N periods.

 %Inputs:
%S_0=current price of the asset i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma=volatility of the asset
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
%lamda = 1.22474, stretch parameter
mi = r-0.5*sigma^2;

dt = T / N;%length of one time step
disc = exp(-r * dt);%discount
%%%%%%%%%%%%
u = exp(sigma * lamda* sqrt(dt));
%up jump of asset(model parameter)
d = 1/u;%down jump of asset(model parameter)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Pu=1/(2*lamda^2)+((mi*sqrt(dt))/(2*lamda*sigma));
%pseudo probability of jump u
Pd=1/(2*lamda^2)-((mi*sqrt(dt))/(2*lamda*sigma));
%pseudo probability of jump d
Pm=1 - (1/lamda^2);%pseudo probability of jump m

tree = zeros(N,N+1);%Trinomial table with dimantions N,N+1

%estimate final asset's price at time of maturity
%i corresponds to Time(N+1), j corresponds to asset_1(j+1)
for j = 0:2*N
St( N+1,j+1) = S_0*u^max(j - N, 0) * d^max(N - j, 0) ;
end

%estimate final options's price at time of maturity
for j = 0:2*N
tree( N+1,j+1) = max(0, (St( N+1,j+1) - K)) ;
end

%binomial distribution formula
for i=N-1: -1 :0
for j=0:i*2
tree(i+1,j+1) = disc*(Pu*tree(i+2,j+3) + Pm*tree(i+2,j+2)
                                + Pd*tree(i+2,j+1));
end
end

price = tree(1,1)%Output: Fair price for the European call option
end
```

Γ′.3 Διωνυμικό υπόδειγμα: Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης

```
function [price] = BinomialEurPut(S_0,K,T,N,sigma,r)
%BinomialEurPut function calculates the fair price
 %of an European put option using the binomial model for N periods.

 %Inputs:
%S_0=current price of the asset i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma=volatility of the asset
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
dt=T/N;%length of one time step
u = exp(sigma*sqrt(dt));%up jump of asset(model parameter)
d=1/u; %down jump of asset(model parameter)
p=(exp(r*dt) - d)/(u-d);%pseudo probability of upward movement
disc=exp(-r*T);%discount
tree = zeros(1 , N+1);%Binomial table with dimantions 1,N+1
%for k=0:N
  %  St(1,k+1)=S_0*(u^k)*(d^(N-k)) ;
%end
%for j=0:N
  %  tree(1,j+1)=max(0, S_0*(u^j)*(d^(N-j))  -K);
%end
for j=0:N
    %binomial distribution formula
    tree(j+1) = ((nchoosek(N,j)*p^j*(1-p)^(N-j))*
                     max(0,K -S_0*(u^j)*(d^(N-j)) ))*disc ;
end
price= sum(tree)%Output: Fair price for the European put option
end
```

Γ΄.4 Τριωνυμικό υπόδειγμα: Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης

```
function [price] = TrinomialEurPut(S_0,K,T,N,sigma,r,lamda)
%TrinomialEurPut function calculates the fair price
 %of an European put option using the binomial model for N periods.

 %Inputs:
%S_0=current price of the asset i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma=volatility of the asset
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
%lamda = 1.22474, stretch parameter
mi = r-0.5*sigma^2;

dt = T / N;%length of one time step
disc = exp(-r * dt);%discount
%%%%%%%%%%%%
u = exp(sigma * lamda* sqrt(dt));
%up jump of asset(model parameter)
d = 1/u;%down jump of asset(model parameter)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Pu=1/(2*lamda^2)+((mi*sqrt(dt))/(2*lamda*sigma));
%pseudo probability of jump u
Pd=1/(2*lamda^2)-((mi*sqrt(dt))/(2*lamda*sigma));
%pseudo probability of jump d
Pm=1 - (1/lamda^2);%pseudo probability of jump m

tree = zeros(N,N+1);%Trinomial table with dimantions N,N+1

%estimate final asset's price at time of maturity
%i corresponds to Time(N+1), j corresponds to asset_1(j+1)
for j = 0:2*N
St( N+1,j+1) = S_0*u^max(j - N, 0) * d^max(N - j, 0) ;
end

%estimate final options's price at time of maturity
for j = 0:2*N
tree( N+1,j+1) = max(0, (K- St( N+1,j+1) )) ;
end

%binomial distribution formula
for i=N-1: -1 :0
for j=0:i*2
tree(i+1,j+1) = disc*(Pu*tree(i+2,j+3) + Pm*tree(i+2,j+2)
                           + Pd*tree(i+2,j+1));
end
end

price = tree(1,1)%Output: Fair price for the European put option
end
```

Γ′.5 Μοντέλο Black-Scholes: Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

```
function[C]= BlackScholesEurCall(S_0,K,T,sigma,r)
 %BlackScholesEurCall function uses Black Scholes simulation to estimate
 %the fair price of European Call Options

 %Inputs:
%S_0=initial price of the asset, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%T=time to option maturity
%sigma=volatility of the asset
%d1,d2 are model properties
d1 = (log(S_0/K) + (r + sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2 = d1 - (sigma*sqrt(T));

C = S_0*normcdf(d1) - K*(exp(-r*T)*normcdf(d2));
%Output: Fair price for the European Call option
end


Input argument "S_0" is undefined.
```

Γ′.6 Μοντέλο Black-Scholes: Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης

```
function[P] = BlackScholesEurPut(S_0,K,T,sigma,r)
%BlackScholesEurPut function uses Black Scholes simulation
%to estimate the fair price of European Put Options

 %Inputs:
%S_0=initial price of the asset, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%T=time to option maturity
%sigma=volatility of the asset
%d1,d2 are model properties
d1 = (log(S_0/K) + (r + sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2 = d1 - (sigma*sqrt(T));

% # ##μ# ### ##  call option
P = K*(exp(-r*T)*normcdf(-d2))-S_0*normcdf(-d1)
%Output: Fair price for the European Put option
end
```

Γ′.7 Απόσταση μεταξύ διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος: Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

```
S0=50; X=50; T=1; r=0.1; sigma=0.4;
%Convergence between Binomial Model and Trinomial Model
%for an European Call option
%Inputs:
%l=1.22474, stretch parameter
%S_0=initial price of the asset, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma=volatility of the asset
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T

for i=1:50
    N=i;

    for lamda=1.22474;

    %C_1 calls BinomialEurCall function for an European call option
    C_1(i)=BinomialEurCall(S_0,K,T,N,sigma,r);
    C_2(i)=TrinomialEurCall(S_0,K,T,N,sigma,r,lamda);
    %C_2 calls TrinomialEurCall function for an European call option

plot(C,'b-'), hold on
plot(C_1,'r-'), hold off
%Figure properties
xlabel('N')%it displays the number of steps into time T
ylabel('Converge of lamda, between binomial and trinomial model')
%it displays the deviation between binomial model
 %and trinomial model
    end
end
```

Γ′.8 Απόσταση μεταξύ διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος: Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης

```
S0=50; X=50; T=1; r=0.1; sigma=0.4;
%Convergence between Binomial Model and Trinomial Model
%for an European Call option
%Inputs:
%l=1.22474, stretch parameter
%S_0=initial price of the asset, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma=volatility of the asset
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T

for i=1:50
    N=i;

    for lamda=1.22474;

    %C_1 calls BinomialEurCall function for an European call option
    P(i) =Bino_Opt_Pr_Put( S0, X, r, sigma, N, T );
    P_1(i)=Trinomial_Eu_Put( S0, X, r, sigma, N, T ,lamda);
    %C_2 calls TrinomialEurCall function for an European call option

plot(P,'b-'), hold on
plot(P_1,'r-'), hold off
%Figure properties
xlabel('N')%it displays the number of steps into time T
ylabel('Converge of lamda, between binomial and trinomial model')
%it displays the deviation between binomial model
 %and trinomial model
    end
end
```

Γ′.9 Σύγκλιση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος ως προς το Black-Scholes : Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

```
%Convergence between Binomial Model and Trinomial Model
%to Black-Scholes formula for an European Call option
S_0=50; K=50; T=1; r=0.1; sigma=0.4; lamda=1.22474;
%Inputs:
%l=1.22474, stretch parameter
%S_0=initial price of the asset, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma=volatility of the asset
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
%C calls BlackScholesEurCall function for an European Call option
C = BlackScholesEurCall(S_0,K,T,sigma,r);


for i=1:50
    N=i;
    %C_1 calls BinomialEurCall function for an European call option
    C_1(i)=BinomialEurCall(S_0,K,T,N,sigma,r);
    C_2(i)=TrinomialEurCall(S_0,K,T,N,sigma,r,lamda);
    %C_2 calls TrinomialEurCall function for an European call option


x= C_1-C;%deviation between binomial model and BlackScholes method
y= C_2-C;%deviation between trinomial model and BlackScholes method


plot(x,'b-'), hold on
plot(y,'r-'), hold off
%Figure properties
xlabel('N')%it displays the number of steps into time T
ylabel('deviation')%it displays the deviation between binomial model,
 %trinomial model and Black Scholes method
```

Γ′.10 Σύγκλιση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος ως προς το Black-Scholes : Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης

```
%Convergence between Binomial Model and Trinomial Model to
 %Black-Scholes formula for an European Put option
S_0=50; K=50; T=1; r=0.1; sigma=0.4; lamda=1.22474;
%Inputs:
%l=1.22474, stretch parameter
%S_0=initial price of the asset, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma=volatility of the asset
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
%P calls BlackScholesEurPut function for an European Put option
P = BlackScholesEurPut(S_0,K,T,sigma,r);


for i=1:50
    N=i;
    %P_1 calls BinomialEurPut function for an European Put option
    P_1(i)=BinomialEurPut(S_0,K,T,N,sigma,r);
    P_2(i)=TrinomialEurPut(S_0,K,T,N,sigma,r,lamda);
    %P_2 calls TrinomialEurPut function for an European Put option


x= P_1-P;%deviation between binomial model and BlackScholes method
y= P_2-P;%deviation between trinomial model and BlackScholes method


plot(x,'b-'), hold on
plot(y,'r-'), hold off
%Figure properties
xlabel('N')%it displays the number of steps into time T
ylabel('deviation')%it displays the deviation between binomial model,
 %trinomial model and Black Scholes method
```

Γ'.11 Σύγκλιση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος ως προς το Black-Scholes ως προς την παράμετρο λ: Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

```
clear all;
%Convergence between Binomial Model and Trinomial Model for different
 %values of stretch parameter lamda for an European Call option
S_0=50; K=50; T=1; r=0.1; sigma=0.4; N=50;
%Inputs:
%l=1.22474, stretch parameter
%S_0=initial price of the asset , i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma=volatility of the asset
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
i=1;
for lamda=1.01:0.01:2

    %C calls BinomialEurCall function for an European Put option
    C=BinomialEurCall(S_0,K,T,N,sigma,r);


    C_1=TrinomialEurCall(S_0,K,T,N,sigma,r,lamda);
    %C_1 calls TrinomialEurCall function for an European Put option

    x(i)=C-C_1; %deviation between Binomial and Trinomial model
    i=i+1

end

plot(1.01:0.01:2,x)
%Figure properties
xlabel('lamda values') %it displays differetn lamda values
ylabel('deviation of Binomial-Trinomial')
%displays the deviation between Binomial and Trinomial model
axis([1 2 min(x) max(x)])
```

Γ′.12 Σύγκλιση διωνυμικού και τριωνυμικού υποδείγματος ως προς το Black-Scholes ως προς την παράμετρο λ: Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης

```
clear all;
%Convergence between Binomial Model and Trinomial Model for different
 %values of stretch parameter lamda for an European Call option
S_0=50; K=50; T=1; r=0.1; sigma=0.4; N=50;
%Inputs:
%l=1.22474, stretch parameter
%S_0=initial price of the asset , i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma=volatility of the asset
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
i=1;
for lamda=1.01:0.01:2

    %P calls BinomialEurPut function for an European Put option
    P=BinomialEurPut(S_0,K,T,N,sigma,r);


    P_1=TrinomialEurPut(S_0,K,T,N,sigma,r,lamda);
    %P_1 calls TrinomialEurPut function for an European Put option

    x(i)=P-P_1; %deviation between Binomial and Trinomial model

    i=i+1

end

plot(1.01:0.01:2,x)
%Figure properties
xlabel('lamda values') %it displays differetn lamda values
ylabel('deviation of Binomial-Trinomial')
%displays the deviation between Binomial and Trinomial model
axis([1 2 min(x) max(x)])
```

Γ′.13 Υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων για το European Call On Maximum

```
function [price] = BinomialEurCallTwoVarCallOnMax(S_1,S_2,K,T,N,sigma_1,s
%(S_1,S_2,K,T,N,sigma_1,sigma_2,rho,r)
%BinomialEurCallTwoVar function calculates the fair price
 %of an European call option using the binomial model for N periods.

 %Inputs:
%S_1=current price of asset, i=1,...,N
%S_2=current price of asset, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma_1=volatility of asset S_1
%sigma_2=volatility of asset S_2
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
%rho= correlation cefficient between assets 1&2
mi_1=r-0.5*sigma_1.^2;% drift1 of continious lognormal distribution
mi_2=r-0.5*sigma_2.^2;% drift2 of continious lognormal distribution
dt=T/N;%length of one time step
u_1 = exp(sigma_1*sqrt(dt));%up jump of asset 1(model parameter)
u_2 = exp(sigma_2*sqrt(dt));%up jump of asset 2(model parameter)
d_1=1/u_1;%down jump of asset 1(model parameter)
d_2=1/u_2;%down jump of asset 2(model parameter)
discount=exp(-r*dt);%discount
x=mi_1/sigma_1;
y=mi_2/sigma_2;
p_uu=0.25*(1+rho+sqrt(dt)*((x)+(y)));%pseudo probability of jump u_1 u_2
p_ud=0.25*(1-rho+sqrt(dt)*((x)-(y)));%pseudo probability of jump u_1 d_2
p_du=0.25*(1-rho+sqrt(dt)*((-x)+(y)));%pseudo probability of jump d_1 u_2
p_dd=0.25*(1+rho+sqrt(dt)*((-x)-(y)));%pseudo probability of jump d_1 d_2

bino_tree = zeros( N+1, N+1 , N+1); %Binomial table with dimantions
                                   %N+1,N+1,N+1

%estimate final asset's price at time of maturity
%i corresponds to Time(N+1), j corresponds to asset_1(j+1)
  %and kcorresponds to asset_2(k+1)
   for j=0:N
     for k=0:N
      St_1(N+1 , j+1, k+1) = S_1*u_1^(j)*d_1^(N-j);
      St_2(N+1 , j+1, k+1) = S_2*u_2^(k)*d_2^(N-k);
     end
   end

%estimate final options's price at time of maturity
   for j=0:N
      for k=0:N
      bino_tree(N+1 , j+1, k+1)= max(max(St_1(N+1 , j+1, k+1),
                            St_2(N+1 , j+1, k+1))-K,0);
     end
   end

%binomial distribution formula
   for i=N-1:-1:0
    for j=0:1:i
```

1

```
 for k=0:1:i
     bino_tree(i+1,j+1,k+1)=discount*(p_uu*bino_tree(i+2,j+2,k+2)+...
                                 p_ud*bino_tree(i+2,j+2,k+1)+...
                                  p_du*bino_tree(i+2,j+1,k+2)+...
                                   p_dd*bino_tree(i+2,j+1,k+1));
   end
  end
 end

 price=bino_tree(1,1,1)%Output: Fair price for the European call option
end
```

Error: File: C:\Users\USER\Desktop\fakelos.m Line: 7 Column: 4
Illegal use of reserved keyword "end".

Published with MATLAB® 7.8

Γ′.14 Υπόδειγμα τεσσάρων αλμάτων για το European Put On Maximum

```
function [price] = BinomialEurPutTwoVarPutOnMax(S_1,S_2,K,T,N,sigma_1,sig
%(S_1,S_2,K,T,N,sigma_1,sigma_2,rho,r)
%BinomialEurCallTwoVar function calculates the fair price
 %of an European call option using the binomial model for N periods.

 %Inputs:
%S_1=current price of asset, i=1,...,N
%S_2=current price of asset, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma_1=volatility of asset S_1
%sigma_2=volatility of asset S_2
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
%rho= correlation cefficient between assets 1&2
mi_1=r-0.5*sigma_1.^2;
% drift1 of continious lognormal distribution
mi_2=r-0.5*sigma_2.^2;
% drift2 of continious lognormal distribution
dt=T/N;%length of one time step
u_1 = exp(sigma_1*sqrt(dt));
%up jump of asset 1(model parameter)
u_2 = exp(sigma_2*sqrt(dt));
%up jump of asset 2(model parameter)
d_1=1/u_1;%down jump of asset 1(model parameter)
d_2=1/u_2;%down jump of asset 2(model parameter)
discount=exp(-r*dt);%discount
x=mi_1/sigma_1;
y=mi_2/sigma_2;
p_uu=0.25*(1+rho+sqrt(dt)*((x)+(y)));
%pseudo probability of jump u_1 u_2
p_ud=0.25*(1-rho+sqrt(dt)*((x)-(y)));
%pseudo probability of jump u_1 d_2
p_du=0.25*(1-rho+sqrt(dt)*((-x)+(y)));
%pseudo probability of jump d_1 u_2
p_dd=0.25*(1+rho+sqrt(dt)*((-x)-(y)));
%pseudo probability of jump d_1 d_2

bino_tree = zeros( N+1, N+1 , N+1);
%Binomial table with dimantions N+1,N+1,N+1

%estimate final asset's price at time of maturity
%i corresponds to Time(N+1), j corresponds to asset_1(j+1)
 %and kcorresponds to asset_2(k+1)
   for j=0:N
     for k=0:N
      St_1(N+1 , j+1, k+1) = S_1*u_1^(j)*d_1^(N-j);
      St_2(N+1 , j+1, k+1) = S_2*u_2^(k)*d_2^(N-k);
     end
   end

%estimate final options's price at time of maturity
   for j=0:N
      for k=0:N
```

1

```
bino_tree(N+1 , j+1, k+1)= max(K-max(St_1(N+1 , j+1, k+1),St_2(N+1 , j+1,
     end
   end

%binomial distribution formula
   for i=N-1:-1:0
    for j=0:1:i
      for k=0:1:i
     bino_tree(i+1,j+1,k+1)=discount*(p_uu*bino_tree(i+2,j+2,k+2)+...
                                 p_ud*bino_tree(i+2,j+2,k+1)+...
                                  p_du*bino_tree(i+2,j+1,k+2)+...
                                   p_dd*bino_tree(i+2,j+1,k+1));
    end
   end
  end

  price=bino_tree(1,1,1)%Output: Fair price for the European call option
end
```

Error: File: C:\Users\USER\Desktop\fakelos1.m Line: 2 Column: 6
Illegal use of reserved keyword "end".

Published with MATLAB® 7.8

1

Γ′.15 Υπόδειγμα πέντε αλμάτων για το European Call On Maximum

```
function [price] = TrinomialEurCallTwoVarCallOnMax(S_1,S_2,K,T,N,sigma_1,
%(S_1,S_2,K,T,N,sigma_1,sigma_2,rho,r,l)
%TrinomialEurCallTwoVar function calculates the fair price
 %of an European call option using the binomial model for N periods.

 %Inputs:
%l=1.11803;
%S_1=current price of asset, i=1,...,N
%S_2=current price of asset, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma_1=volatility of asset S_1
%sigma_2=volatility of asset S_2
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
%rho= correlation cefficient between assets 1&2
mi_1=r-0.5*sigma_1.^2;
mi_2=r-0.5*sigma_2.^2;

dt=T/N;%length of one time step
u_1 = exp(sigma_1*l*sqrt(dt));%up jump of asset 1(model parameter)
u_2 = exp(sigma_2*l*sqrt(dt));%up jump of asset 2(model parameter)
d_1=1/u_1;%down jump of asset 1(model parameter)
d_2=1/u_2;%down jump of asset 2(model parameter)
discount=exp(-r*dt);%discount

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x=mi_1/sigma_1;
y=mi_2/sigma_2;
p_1=0.25*((1/l^2)+(rho/l^2)+(sqrt(dt)/l)*((x)+(y)));
%pseudo probability of jump u_1 u_2
p_2=0.25*((1/l^2)-(rho/l^2)+(sqrt(dt)/l)*((x)-(y)));
%pseudo probability of jump u_1 d_2
p_3=0.25*((1/l^2)+(rho/l^2)+(sqrt(dt)/l)*((-x)-(y)));
%pseudo probability of jump d_1 d_2
p_4=0.25*((1/l^2)-(rho/l^2)+(sqrt(dt)/l)*((-x)+(y)));
%pseudo probability of jump d_1 u_2
p_5=1-(1/l^2);%no movement pseudo probability
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
bino_tree = zeros( N, N , N); %Binomial table with dimantions N,N,N

%estimate final asset's price at time of maturity
 %i corresponds to Time(N+1), j corresponds to asset_1(j+1)
  %and kcorresponds to asset_2(k+1)
   for j=0:2*N
     for k=0:2*N
      St_1(N+1,j+1,k+1) = S_1*u_1^max(j - N, 0) * d_1^max(N - j, 0);
      St_2(N+1,j+1,k+1) = S_2*u_2^max(k - N, 0) * d_2^max(N - k, 0);
     end
   end

%estimate final options's price at time of maturity
   for j=0:2*N
      for k=0:2*N
```

1

```
bino_tree(N+1,j+1, k+1)= max(max(St_1(N+1 , j+1, k+1),
                                    St_2(N+1 , j+1, k+1))-K,0);
     end
   end

%binomial distribution formula
   for i=N-1:-1:0
    for j=0:2*i
      for k=0:2*i
     bino_tree(i+1,j+1,k+1)=discount*(p_1*bino_tree(i+2,j+3,k+3)+...
                                 p_2*bino_tree(i+2,j+3,k+1)+...
                                  p_3*bino_tree(i+2,j+1,k+1)+...
                                   p_4*bino_tree(i+2,j+1,k+3)+...
                                   p_5*bino_tree(i+2,j+2,k+2));
    end
   end
  end

  price=bino_tree(1,1,1)%Output: Fair price for the European call option
  end
```

Error: File: C:\Users\USER\Desktop\fakelos2.m Line: 1 Column: 55
Expression or statement is incorrect--possibly unbalanced (, {, or [.

Published with MATLAB® 7.8

Γ′.16 Υπόδειγμα πέντε αλμάτων για το European Put On Maximum

```
function [price] = TrinomialEurPutTwoVarPutOnMax(S_1,S_2,K,T,N,sigma_1,si
%(S_1,S_2,K,T,N,sigma_1,sigma_2,rho,r,l)
%TrinomialEurCallTwoVar function calculates the fair price
 %of an European call option using the binomial model for N periods.

 %Inputs:
%l=1.11803;
%S_1=current price of asset, i=1,...,N
%S_2=current price of asset, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma_1=volatility of asset S_1
%sigma_2=volatility of asset S_2
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
%rho= correlation cefficient between assets 1&2
mi_1=r-0.5*sigma_1.^2;
mi_2=r-0.5*sigma_2.^2;

dt=T/N;%length of one time step
u_1 = exp(sigma_1*l*sqrt(dt));
%up jump of asset 1(model parameter)
u_2 = exp(sigma_2*l*sqrt(dt));
%up jump of asset 2(model parameter)
d_1=1/u_1;%down jump of asset 1(model parameter)
d_2=1/u_2;%down jump of asset 2(model parameter)
discount=exp(-r*dt);%discount

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x=mi_1/sigma_1;
y=mi_2/sigma_2;
p_1=0.25*((1/l^2)+(rho/l^2)+(sqrt(dt)/l)*((x)+(y)));
%pseudo probability of jump u_1 u_2
p_2=0.25*((1/l^2)-(rho/l^2)+(sqrt(dt)/l)*((x)-(y)));
%pseudo probability of jump u_1 d_2
p_3=0.25*((1/l^2)+(rho/l^2)+(sqrt(dt)/l)*((-x)-(y)));
%pseudo probability of jump d_1 d_2
p_4=0.25*((1/l^2)-(rho/l^2)+(sqrt(dt)/l)*((-x)+(y)));
%pseudo probability of jump d_1 u_2
p_5=1-(1/l^2);%no movement pseudo probability
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
bino_tree = zeros( N, N , N); %Binomial table with dimantions N,N,N

%estimate final asset's price at time of maturity
%i corresponds to Time(N+1), j corresponds to asset_1(j+1) \
 %and kcorresponds to asset_2(k+1)
   for j=0:2*N
     for k=0:2*N
      St_1(N+1,j+1,k+1) = S_1*u_1^max(j - N, 0)*d_1^max(N - j, 0);
      St_2(N+1,j+1,k+1) = S_2*u_2^max(k - N, 0)*d_2^max(N - k, 0);
     end
   end

%estimate final options's price at time of maturity
```

1

```
for j=0:2*N
      for k=0:2*N
      bino_tree(N+1,j+1, k+1)= max(K- max(St_1(N+1 , j+1, k+1),
                                St_2(N+1 , j+1, k+1)),0);
     end
   end

%binomial distribution formula
   for i=N-1:-1:0
    for j=0:2*i
      for k=0:2*i
     bino_tree(i+1,j+1,k+1)=discount*(p_1*bino_tree(i+2,j+3,k+3)+...
                                  p_2*bino_tree(i+2,j+3,k+1)+...
                                   p_3*bino_tree(i+2,j+1,k+1)+...
                                    p_4*bino_tree(i+2,j+1,k+3)+...
                                    p_5*bino_tree(i+2,j+2,k+2));
    end
   end
  end

  price=bino_tree(1,1,1)%Output: Fair price for the European call option
  end
```

Error: File: C:\Users\USER\Desktop\fakelos3.m Line: 3 Column: 64
Expression or statement is incorrect--possibly unbalanced (, {, or [.

Published with MATLAB® 7.8

1

Γ′.17 Προσομοίωση Monte-Carlo: European Call On Maximum

```
function [ value  ] = MonteCarloEuCallOnMax(S_1 ,S_2 ,sigma_1,sigma_2,rho
%(S_1 ,S_2 ,sigma_1,sigma_2,rho,T,r,M,K)
%MonteCarloEuCallOnMax function uses Monte Carlo simulation to estimate
 %the fair price of European Call Options

 %Inputs:
%S_1=initial price of asset 1, i=1,...,N
%S_2=initial price of asset 2, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%T=time to option maturity
%M=number of different paths
%sigma_1=volatility of asset 1
%sigma_2=volatility of asset 2
%rho= correlation cefficient between assets 1&2
randn('state',100);
eps1 = randn(1,M);%table with dimensions 1,M
eps2 = rho*eps1 + sqrt(1-rho^2)*randn(1,M);%table with dimensions 1,M
S1T = S_1*exp((r - 0.5*sigma_1^2)*T + sigma_1*sqrt(T)*eps1);
%current price of asset 1
S2T = S_2*exp((r - 0.5*sigma_2^2)*T + sigma_2*sqrt(T)*eps2);
%current price of asset 2
DiscPayoff = exp(-r*T)*max(max(S1T,S2T)-K, 0);%payoff of the model
SD = std(DiscPayoff);%standard deviation of the model
SE=SD/sqrt(M)%standard error of the model
value = mean(DiscPayoff)
%Output: Fair price for the European call option

end
```

Γ′.18 Προσομοίωση Monte-Carlo: European Put On Maximum

```
function [ value  ] = MonteCarloEuPutOnMax(S_1 ,S_2 ,sigma_1,sigma_2,rho,
%(S_1 ,S_2 ,sigma_1,sigma_2,rho,T,r,M,K)
%MonteCarloEuPutOnMax function uses Monte Carlo simulation to estimate
 %the fair price of European Put Options

 %Inputs:
%S_1=initial price of asset 1, i=1,...,N
%S_2=initial price of asset 2, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%T=time to option maturity
%M=number of different paths
%sigma_1=volatility of asset 1
%sigma_2=volatility of asset 2
%rho= correlation cefficient between assets 1&2
randn('state',100);
eps1 = randn(1,M);%table with dimensions 1,M
eps2 = rho*eps1 + sqrt(1-rho^2)*randn(1,M);
%table with dimensions 1,M
S1T = S_1*exp((r - 0.5*sigma_1^2)*T + sigma_1*sqrt(T)*eps1);
%current price of asset 1
S2T = S_2*exp((r - 0.5*sigma_2^2)*T + sigma_2*sqrt(T)*eps2);
%current price of asset 2
DiscPayoff = exp(-r*T)*max(K-max(S1T,S2T), 0);
%payoff of the model
SD = std(DiscPayoff)%standard deviation of the model
SE=SD/sqrt(M)%standard error of the model
value = mean(DiscPayoff)
%Output: Fair price for the European Put option

end
```

Γ′.19 Σύγκλιση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων στην τιμή Monte-Carlo για το European Call On Maximum

```
%Convergence between Binomial Model and Trinomial Model
 %to MonteCarlo formula for an European Call option
S_1=40;S_2=40;K=35;T=7/12;
sigma_1=0.2;sigma_2=0.3;rho=0.5;
r=0.04879;l=1.11803;M=1000000;N=50;
%Inputs:
%M=number of different paths
%l=1.11803, stretch parameter
%S_1=initial price of asset 1, i=1,...,N
%S_2=initial price of asset 2, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma_1=volatility of asset 1
%sigma_2=volatility of asset 2
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
%rho= correlation cefficient between assets 1&2
%C calls MonteCarloEuCallOnMax function for an European Call option
C = MonteCarloEuCallOnMax(S_1 ,S_2 ,sigma_1,sigma_2,rho,T,r,M,K);

for i=1:N
    N=i;
 %C_1 calls BinomialEurCallTwoVarCallOnMax function for an European call
 C_1(i)=BinomialEurCallTwoVarCallOnMax(S_1,S_2,K,T,N,sigma_1,sigma_2,rho,
 C_2(i)=TrinomialEurCallTwoVarCallOnMax(S_1,S_2,K,T,N,sigma_1,sigma_2,rhc
 %C_2 calls TrinomialEurCallTwoVarCallOnMax function for an European call


x= (C-C_1);%deviation between binomial model and MonteCarlo method
y= (C-C_2);%deviation between trinomial model and MonteCarlo method


plot(x,'b-'), hold on
plot(y,'r-'), hold off
%Figure properties
xlabel('N')%it displays the number of steps into time T
ylabel('deviation')%it displays the deviation between binomial model,
 %trinomial model and MonteCarlo method

end
```

Γ′.20 Σύγκλιση υποδείγματος τεσσάρων και πέντε αλμάτων στην τιμή Monte-Carlo για το European Put On Maximum

```
S_1=40;S_2=40;K=40;T=1;
sigma_1=0.2;sigma_2=0.3;rho=0.5;
r=0.04879;l=1.2;M=1000000;N=50;
%Inputs:
%M=number of different paths
%l=1.11803, stretch parameter
%S_1=initial price of asset 1, i=1,...,N
%S_2=initial price of asset 2, i=1,...,N
%K=exercise price of option
%r=yearly interest rate
%sigma_1=volatility of asset 1
%sigma_2=volatility of asset 2
%T=time to option maturity
%N=number of steps into time T
%rho= correlation cefficient between assets 1&2
%P calls MonteCarloPutOnMin function for an European call option
P = MonteCarloEuPutOnMax(S_1 ,S_2 ,sigma_1,sigma_2,rho,T,r,M,K) ;

for i=1:N
    N=i;
 %P_1 calls BinomialEurPutTwoVarPutOnMax function for an European put opt
 P_1(i)=BinomialEurPutTwoVarPutOnMax(S_1,S_2,K,T,N,sigma_1,sigma_2,rho,r)
 P_2(i)=TrinomialEurPutTwoVarPutOnMax(S_1,S_2,K,T,N,sigma_1,sigma_2,rho,r
 %P_2 calls TrinomialEurPutTwoVarPutOnMax function for an European put op


x= P_1-P;%deviation between binomial model and MonteCarlo method
y= P_2-P;%deviation between trinomial model and MonteCarlo method


plot(x,'b-'), hold on
plot(y,'r-'), hold off
%Figure properties
xlabel('N')%it displays the number of steps into time T
ylabel('deviation')%it displays the deviation between binomial model,
 %trinomial model and MonteCarlo method

end
```